

С. И. Шохорь-Троцкий.

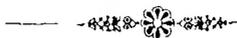
ОПЫТЪ
МЕТОДИКИ АРИФМЕТИКИ

для

преподавателей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ,

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ

Рѣшеній типическихъ арифметическихъ задачъ алгебраическаго характера.



ИЗДАНИЕ ТИПОГРАФИИ А. А. КАРЦЕВА
Коммисіонера ИМПЕРАТОРСКАГО Общества Любителей Естествознанія, Антропологии и Этнографіи.
Москва. Цокровка, д. Егорова.

1888.

(106).

ПРЕДИСЛОВІЕ.



L'art d'enseigner c'est l'art d'indiquer
aux autres ce qu'ils doivent faire pour
s'instruire.

Jacotot.

Предлагая вниманію преподавателей математики въ ср. уч. зав. этотъ „Опытъ“, мы ни мало не намѣрены скрывать отъ себя всю трудность удовлетворенія требованіямъ, которыя могутъ быть предъявлены къ этому посильному труду нашему. Но насъ смущаетъ также обычное въ публикѣ, на вниманіе которой мы осмѣливаемся рассчитывать, рѣзкокомѣрное, какъ бы презрительное отношеніе ко всякаго рода руководствамъ по предмету методики. Очень можетъ быть, что и этотъ трудъ самъ по себѣ недостойнъ лучшаго отношенія по своимъ качествамъ; но осмѣливаемся, во имя вполне законныхъ требованій педагогики, протестовать противъ такого отношенія къ методикѣ *вообще*, какъ одной изъ важнѣйшихъ въ практическомъ смыслѣ педагогическихъ дисциплинъ. Интересующагося подробностями нашего взгляда позволяемъ себѣ отослать къ § 5 главы первой этого сочиненія. По нашему крайнему разумѣнію, презрительное или даже только равнодушное отношеніе къ методикѣ преподаваемаго предмета со стороны преподавателя — очень печальное недоразумѣніе, хотя и объясняемое исторією слишкомъ иногда неразумительнаго увлеченія пѣмецкою педагогикою со всѣми ея частностями, но вовсе не простительное съ иныхъ точекъ зрѣнія.

Цѣль наша будетъ достигнута, если этому сочиненію удастся поднять въ средѣ преподавателей математики интересъ къ предмету, почему-то игнорируемому въ нашей педагогической и учебно-

IV

математической литературы; говоримъ „игнорируемому“ потому, что существующія у насъ по этому предмету руководства имѣютъ въ виду преимущественно потребности начальныхъ народныхъ школъ, а не ср. уч. заведеній, которыхъ потребности, какъ извѣстно, далеко не совпадаютъ съ потребностями школъ народныхъ.

Въ заключеніе считаемъ долгомъ замѣтить, что нѣкоторые (впрочемъ, немногіе) параграфы этого сочиненія взяты изъ другого сочиненія нашего, предназначеннаго для учителей народныхъ школъ, для учительскихъ семинарій и институтовъ и педагогическихъ классовъ женскихъ гимназій, подъ заглавіемъ: „Методика арифметики съ приложеніемъ Сборника упражненій для учащихся“ (М. 1886).

С. Шохоръ-Троцкій.

С. Петербургъ
Ноябрь 1887 г.



Г л а в а I.

Задачи и предметъ Методики Ариѳметики.

Стр.

§ 1. Различіе между наукою и учебнымъ предметомъ.— § 2. Что такое ариѳметика съ исторической точки зрѣнія? — § 3. Какое долженъ быть курсъ ариѳметики въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и курсъ повторительный въ одномъ изъ высшихъ? — § 4. Существованіе различія, но не противоположности, между учебнымъ предметомъ и наукою того же имени.— § 5. Нужно ли преподавателямъ математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ близкое знакомство съ основными вопросами методики ариѳметики? — § 6. Что такое методика ариѳметики? 1

Г л а в а II.

Очеркъ методологіи ариѳметики и разъясненіе нѣкоторыхъ ариѳметическихъ понятій.

§ 1. Область вѣдѣнія ариѳметики. — § 2. Методы ариѳметики-науки. — § 3. Понятія единицы, счета и числа. — § 4. Дѣйствіе сложенія.— § 5. Методологическое значеніе опредѣленій остальныхъ дѣйствій и идея прямолинейнаго развитія прямыхъ дѣйствій изъ дѣйствія сложенія.— § 6. Идея обращенія дѣйствій.— § 7. Основные законы, которымъ подчиняются дѣйствія надъ числами: перемѣстительный, сочетательный и распределительный.— § 8. Отношеніе дѣйствій надъ числами къ дѣйствіямъ надъ величинами. — § 9. Система опредѣленій дѣйствій надъ числами. § 10. Фиктивность дробныхъ чиселъ. — § 11. Дѣйствія надъ дробными числами.— § 12. Классификація въ ариѳметикѣ.— § 13. О числѣ значеній ариѳметическихъ функций.— § 14. О методѣ ариѳметики-науки.— § 15. Понятіе величины. 17

Глава III.

Основные методические принципы обучения арифметикѣ.

Стр.

§ 1. Цель обучения арифметикѣ.—§ 2. Обь обученіи въ раннемъ дѣтскомъ возрастѣ.—§ 3. О задаваніи дѣтскому уму только одной работы за-разъ и о принципѣ труда.—§ 4. Вліянія на обученіе арифметикѣ въ разные эпохи.—§ 5. Недостатки и его значеніе для обученія вообще и арифметикѣ въ частности.—§ 6. Метода изученія чиселъ вообще и метода Грube въ частности.—§ 7. Истинная цѣнность метода изученія чиселъ.—§ 8. Роль задачъ и примѣровъ при обученіи арифметикѣ.—§ 9. Способы рѣшенія задачъ.—§ 10. Наглядность обученія и наглядныя пособия.—§ 11. О катехитической формѣ обученія.—§ 12. Обь учебникѣ и роли его при обученіи.

46

Глава IV.

Первоначальное обученіе арифметикѣ.

§ 1. Что разумѣть подь первоначальнымъ обученіемъ арифметикѣ?—
 § 2. Обученіе счегу.—§ 3. Числительныя имена до 20-ти включительно и значеніе механическаго счегу.—§ 4. Ознакомленіе дѣтей съ арабскими цифрами.—§ 5. Прибавленіе и отниманіе единиц.—
 § 6. Обозначеніе чиселъ, большихъ девяти, по меньшихъ 21-го, помощью цифръ.—§ 7. Выработка понятія о сложении чиселъ, сумма которыхъ не боаѣ 10-ти.—§ 8. Выясненіе понятія о вычитаніи однозначныхъ чиселъ.—§ 9. Сложеніе всякихъ однозначныхъ чиселъ.—§ 10. Необходимость введенія на слѣдующей ступени понятія обь умноженіи и нумерація двузначныхъ чиселъ.—§ 11. Сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ и таблица умноженія.—§ 12. Дѣленіе чиселъ на равныя между собою части.—§ 13. Кратное сравненіе и случай, когда дѣленіе и кратное сравненіе даютъ остатокъ.—§ 14. Обь усныхъ вычисленіяхъ.—§ 15. Объясненіе причинъ пріявненія даннаго дѣйствія и полныя отвѣты.—§ 16. Ознакомленіе дѣтей съ некоторыми арифметическими терминами.—§ 17. Нумерація трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ и первыя два дѣйствія надъ ними.—§ 18. Умноженіе многозначныхъ чиселъ на однозначныя.—§ 19. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ на однозначныя.—§ 20. Нумерація во всемъ объемѣ и первыя два дѣйствія надъ многозначными числами.—§ 21. Умноженіе многозначныхъ чиселъ.—
 § 22. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ.—§ 23. Обь условныхъ выраженіяхъ.

92

Г л а в а V.

Арифметика какъ предметъ общаго и спеціального обра-
зованія.

Стр.

§ 1. Курсъ арифметики: первоначальный—цѣлыхъ чиселъ, полный практической и повторительной теоретической.—§ 2. Содержаніе полного практическаго курса арифметики.—§ 3. О роли задачъ при прохожденіи полного практическаго курса арифметики.—§ 4. О наглядныхъ пособіяхъ при прохожденіи полного практическаго курса арифметики.—§ 5. Изученіе нумераціи. § 6. О сложении цѣлыхъ чиселъ.—§ 7. О вычитаніи.—§ 8. Объ умноженіи.—§ 9. О дѣленіи. § 10. Объ измѣненіи искомымъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненія данныхъ.—§ 11. О случаяхъ, допускающихъ сокращеніе въ вычисленіяхъ. — § 12. Упогребленіе скобокъ. — § 13. О рѣшеніи задачъ арифметическаго и алгебраическаго характера. — § 14. Преобразованіе импованныхъ чиселъ и четыре дѣйствія надъ ними — § 15. О задачахъ на вычисленіе времени и геометрическихъ. — § 16. Ученіе о дѣлителяхъ и соприкасающихся съ ними ученія — § 17. Понятіе о дробяхъ, обозначеніе ихъ, измѣненіе и преобразование ихъ.— § 18. Нахожденіе частей цѣлаго и цѣлаго по частямъ -- § 19. Четыре дѣйствія надъ обыкновенными дробями. — § 20. О десятичныхъ дробяхъ и дѣйствіяхъ надъ ними. — § 21. О периодическихъ дробяхъ. — § 22. Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ. — § 23. Задачи на простое и сложное тройное правило. — § 24. Задачи на правило процентовъ и учета векселей.—§ 25. Задачи на правило пропорціональнаго дѣленія и смѣшенія — § 26. Задачи на правило сроковъ.— § 27. О непрерывныхъ дробяхъ — § 28. Упогребленіе учебника при прохожденіи курса арифметики въ низшихъ классахъ среднихъ и др. учебныхъ заведеній, близкихъ по своему курсу арифметики къ среднимъ.—§ 29. О дополнительныхъ статьяхъ по предмету арифметики.—§ 30. Статьи объ измѣреніи, числѣ и нумераціи.—§ 31. Статья о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами.—§ 32. Статьи о дѣлителяхъ, первоначальныхъ числахъ, общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ числѣ.—§ 33. Статьи о дробяхъ.—§ 34. Статьи о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ. — § 35. Статья о приближенныхъ вычисленіяхъ.—§ 36. Курсъ арифметики въ учительскихъ семинарияхъ, институтахъ, реальныхъ, коммерческихъ и техническихъ училищахъ.— § 37. Методика арифметики какъ педагогическая дисциплина въ курсѣ учительскихъ семинарій и институтовъ. — § 38. Польза, которую принесло бы введеніе методики преподаванія различныхъ отраслей высшей математики въ число необязательныхъ предметовъ отдѣленія физико-математическихъ наукъ математическихъ факультетовъ	122
Приложеніе. Рѣшенія типическихъ арифметическихъ задачъ алгебраическаго характера	202



Г л а в а I.

Задачи и предметъ Методики Арифметики.

§ 1. Различіе между наукою и учебнымъ предметомъ. — § 2. Что такое арифметика съ исторической точки зрѣнія? — § 3. Каковъ долженъ быть курсъ арифметики въ высшихъ классахъ ср. уч. зав. и курсъ повгортельный въ одномъ изъ высшихъ? — § 4. Существованіе различія, но не противоположности, между учебнымъ предметомъ и наукою того же имени. — § 5. Нужно ли преподавателямъ математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ близкое знакомство съ основными вопросами методики арифметики? — § 6. Что такое методика арифметики?

§ 1. Всякая наука есть непременно систематическій сводъ тѣхъ законовъ, которымъ подчиняются явленія одного какого либо рода. Она преслѣдуетъ при этомъ только одну, чисто научную, такъ сказать, теоретическую цѣль: *изслѣдованіе* явленій, *всестороннее изученіе* этихъ законовъ, не имѣя въ виду цѣлей практическихъ вообще и педагогическихъ въ частности. Учебный же предметъ излагаетъ рѣдко все, а чаще—только нѣкоторые законы, которымъ подчиняется тотъ или иной разрядъ явленій, и вовсе не имѣетъ въ виду научное, теоретическое изслѣдованіе и всестороннее изученіе тѣхъ или иныхъ законовъ извѣстнаго порядка. Цѣль учебныхъ предметовъ совсѣмъ иная; учебный предметъ долженъ, во первыхъ, дать учащемуся нѣкоторый кругъ *практически* полезныхъ знаний и умѣній и, во вторыхъ, оказать на умственное его развитіе то или иное полезное *развивательное* вліяніе. Такимъ образомъ учебный предметъ преслѣдуетъ вообще практическія и въ частности педагогическія цѣли. Наука отъ учебнаго предмета отличается поэтому и объемомъ, и характеромъ изложенія, и даже содержаниемъ: что для науки интересно, то въ учебномъ предметѣ иногда и вовсе не уместно; что въ учебномъ

предметъ подлежатъ подробнѣйшему изученію и усвоенію, то въ наукѣ иногда играетъ роль второстепенную; наука стремится къ открытію новыхъ законовъ и методовъ изслѣдованія и къ расширенію области человѣческаго знанія, учебный же предметъ имѣетъ цѣль только съ установленнымися уже ученими и стремится только къ расширенію познанія учащагося. До чего различно смотрятъ на одинъ и тотъ же вопросъ учебный предметъ и наука—видно изъ слѣдующаго сопоставленія: грамматика, какъ учебный предметъ, весьма важное значеніе придаетъ правописанію, руководясь при этомъ требованіями чистаго практическими; грамматика же, какъ отрасль науки языковѣднн, правописанію придаетъ далеко не такое же и далеко не то же значеніе, которое ему дается въ учебникѣ грамматики. Съ другой стороны—тѣ законы, которые открываетъ въ языкахъ наука языковѣднн, для грамматики, какъ учебнаго предмета въ той или иной школѣ, не только не интересны, но часто даже и не доступны. Все вышесказанное легко освѣтитъ съ надлежащей точки зрѣнія, принявъ во вниманіе, что наукѣ нѣтъ дѣла ни до возраста лица, предающагося ей изученію, ни до дѣлей, этимъ лицомъ преслѣдуемыхъ при занятіяхъ ею, ни до его дарованій и способностей, и т. д., въ то время какъ понятіе объ учебномъ предметѣ тѣснѣйше связано именно съ этими условіями обученія: съ возрастомъ и способностями учащагося, съ этнографическими и общественными особенностями школы, а равно съ тѣми или иными общеобразовательными и профессиональными дѣлами, преслѣдуемыми учащимся при прохожденіи даннаго предмета обученія. Что касается интересующаго насъ предмета, то арифметика, какъ наука, есть систематическія сводъ ученій о четырехъ дѣйствіяхъ и необходимыхъ для обоснованія этихъ ученій аксіомъ, теоремъ и теорій *). Какъ учебный же предметъ, арифметика отличается отъ арифметики-науки, во 1-ыхъ, тѣмъ, что въ учебномъ предметѣ нѣтъ строгаго-научной системы, и во 2-ыхъ, тѣмъ,

*) Во избѣжаніе недоразумѣній должно замѣтить, что теорія научной арифметики гораздо многочисленнѣе, чѣмъ это можетъ показаться съ перваго взгляда. Къ ней числу принадлежатъ: теорія системъ численій, теорія возникновенія различныхъ арифметическихъ дѣйствій: умноженія—изъ сложенія и обратныхъ дѣйствій въ соотвѣствующихъ имъ примѣяхъ, теорія дѣйствій надъ дробями, теорія дѣлителей, теорія десятичныхъ дробей, теорія целыхъ пропорцій. Тѣмъ обстоятельствомъ, что арифметика съ давнихъ временъ сдѣлала въ учебномъ предметѣ, изучаемомъ въ юношескомъ и даже дѣтскомъ возрастахъ, весьма легко объяснить почему такъ мало имѣется сочиненій, въ которыхъ она излагалась бы только какъ наука. Въ то время какъ можно поименовать сотни сочиненій, въ которыхъ она излагается съ точки зрѣнія учебнаго предмета, только въ очень немногихъ сочиненіяхъ (напр., въ некоторыхъ книжкахъ „Начала Евклида“) ей ученикамъ приданъ строгаго научнаго характеръ.

что въ учебномъ предметѣ главное вниманіе обращается на пріобрѣтеніе учащимся умѣній и навыка въ толковомъ мышленіи.

Итакъ, вообще между наукою и учебнымъ предметомъ есть глубокое различіе, обусловливаемое прежде всего различіемъ цѣлей, преслѣдуемыхъ первою и вторымъ, и этого различія не только не должно, но и не дозвоительно забывать при обученіи данному предмету: малѣйшая сбивчивость въ пониманіи различія между учебнымъ предметомъ и наукою ведетъ къ особенно печальнымъ послѣдствіямъ, когда имѣешь дѣло съ дѣтьми.

§ 2 Первый вопросъ, который можетъ быть предложенъ относительно занимающаго насъ предмета обученія, т. е. относительно ариометики, заключается въ томъ—что такое ариометика съ точки зрѣнія научной и что она такое, какъ предметъ обученія въ той или иной школѣ? Верно судить о содержаніи данной науки или учебнаго предмета лишь по имени этой науки или учебнаго предмета да по этимологическому происхожденію и значенію этого имени часто невозможно и поэтому не блаторазумно. Геометріи, напр., по прямому смыслу этого слова, должна была бы учить землемѣрію; на самомъ же дѣлѣ она извѣстнымъ образомъ излагаетъ ученія о линіяхъ, поверхностяхъ, тѣлахъ и фигурахъ почти безъ всякаго отношенія къ искусству землемѣрія. Подобное же разногласіе замѣчается между названіями и содержаніемъ также и другихъ отраслей знанія. Напр., слово математика, происходя отъ слова, обозначающаго погрѣшечки *матема*—знаніе, науку, на самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, обозначаетъ только совокупность отдѣльныхъ наукъ о законахъ, управляющихъ міромъ *метрикс*. Это значеніе слово „математика“ имѣло также и въ старину, у самихъ грековъ.—Поэтому для усвоенія себѣ сущности и содержанія данной науки или данного учебнаго предмета, необходимо обратить особенное вниманіе не на имя, не на названіе науки или учебнаго предмета и не на этимологическое происхожденіе этого имени, а на то, въ какомъ видѣ та или другая наука дана намъ въ твореніяхъ первостепенныхъ умовъ, которымъ она обязана своимъ существованіемъ, и въ какомъ видѣ данный учебный предметъ сложился въ историческомъ развитіи школы.

Первоначально,—въ древности, а именно у грековъ,—*ариметика была наукою о свойствахъ чиселъ*. Слово „ариметика“ происходитъ отъ греческаго слова, обозначающаго число: у грековъ, да и у нѣкоторыхъ позднѣйшихъ авторовъ, напр. у Гаусса. *Ариметикю* называлась отрасль знанія, которая нынѣ болѣе извѣстна подъ именемъ *Теорія чиселъ*. Изъ теорія чиселъ, какъ извѣстно, въ современную ариметику вошла только очень немногія ученія о числахъ и, главнымъ образомъ, объ общемъ

наибольшемъ дѣлительъ ^{*)}). Таково первоначальное значеніе слова „арифметика“.

Сводъ *правиль* о томъ, какъ дѣлать вычисленіе надъ числами, греки называли не арифметикою, а *Логистикою*. Это послѣднее слово вышло теперь изъ употребленія по той причинѣ, что греческое искусство вычисления, вмѣстѣ съ выработанными въ Греціи способами вычисленія и изображенія чиселъ, должно было въ послѣдствіи уступить индійско-арабскимъ способамъ изображенія числа и вычисленія надъ числами; съ введеніемъ во всеобщее употребленіе такъ называемыхъ арабскихъ цифръ, греческая логистика потеряла все свое значеніе, если не считать того спеціальнаго интереса, который она представляетъ съ чисто-исторической точки зрѣнія. Въ естественной борьбѣ за свое существованіе и самое слово „логистика“, поэтому, уступило свое мѣсто слову „алгорисмъ“, или „алгориомъ“, обозначававшему на юго-западѣ Евropy, начиная съ XI вѣка, механизмъ вычисленія численныхъ результатовъ, изображенныхъ по десятичной системѣ, при помощи лишь десяти знаковъ. Но слово „алгориомъ“ тоже не вошло во всеобщее употребленіе, и подъ этимъ именемъ иногда разумѣютъ всякій механизмъ вычисленія, независимо отъ его спеціальнаго характера.

Уже въ XVI вѣкѣ, *Вьета* (1540—1603) понималъ подъ арифметикою безразлично какъ *искусство вычисленія*, такъ и *науку о законахъ*, управляющихъ міромъ чиселъ. Въ отличіе отъ цифирной арифметики (*ars minor, arithmetica numerosa*), онъ ту отрасль математики, что нынѣ обыкновенно не совсемъ точно называется алгеброю ^{**)}, называлъ Общею Арифметикою (*ars major, arithmetica speciosa*). Для Вьета особенный интересъ представляла, виро-

^{*)} К. Ф. Гауссъ (1777 — 1855) одно изъ своихъ сочиненій по предмету теоріи чиселъ называлъ „Disquisitiones arithmeticae“; оно появилось въ свѣтъ въ 1801 г.; другой славный германскій геометръ, К. Г. Я. Либни (1804—1851), обнародовалъ въ 1839 году сочиненіе по тому же предмету подъ заглавіемъ „Canon arithmeticus“. Но, несмотря на это, въ большинствѣ случаевъ для обозначенія науки о свойствахъ чиселъ чаще употребляется не слово „арифметика“, а слова „Теорія чиселъ“. Только у французовъ довольно часто теорія чиселъ называется „Высшею арифметикою“ (*arithmétique supérieure*), въ отличіе отъ арифметики низшей, занимающейся вопросами о дѣйствіяхъ надъ числами.

^{***)} Алгеброю нынѣ называютъ не совсемъ точно учебный предметъ, цѣль котораго заключается въ обученіи дѣтямъ общей арифметикѣ, анализу въ некоторыхъ простѣйшихъ функцій и рѣшенію уравненій низшихъ степеней. На самомъ дѣлѣ алгеброю должна была бы называться часть анализа, имѣющая предметомъ своихъ ученій объ уравненіяхъ; низшею — та отрасль алгебры, которая занимается уравненіями, корни которыхъ выражаются въ прямой зависимости отъ коэффициентовъ, высшею — та, которая занимается свойствами и вопросами разрѣшенія всяческихъ алгебраическихъ уравненій.

чемъ, разниа между способами обозначенія чиселъ въ цифриной ариометикѣ и способами обозначенія ихъ въ ариометикѣ всеобщей, и больше всего его занимали уравненія и ихъ разрѣшеніе. *Воплоте* слову „ариметика“ съ XVI в. начали придавать смѣшанное значеніе, хотя, впрочемъ, разниа между искусствомъ вычисленія и научными основаніями этого искусства была болѣе или менѣе ясно сознаваема математиками всѣхъ вѣковъ. Такое значеніе и доселѣ придается этому слову, хотя современные геометры болѣе склонны смотрѣть на ариометику съ чисто-практической точки зрѣнія, а именно только какъ на сводъ *правилъ*, руководясь которыми можно совершать дѣйствія надъ опредѣленными цѣлыми и дробными числами. Этотъ взглядъ, впрочемъ, допускаетъ двоякое примѣненіе: французскіе геометры относятъ къ числу ариометическихъ вычисленій производство не только дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія, но и производство также дѣйствій возвышенія въ степень, извлеченія корней и логарифмированія; у насъ же ариометическими считаются только первые четыре дѣйствія. Если ариометика излагаетъ только правила, мало или вовсе не останавливаясь на теоретическихъ вопросахъ, то она является какъ бы только *искусствомъ вычисленія*. Если же она особенно останавливается на теоретическихъ вопросахъ, то она приближается къ наукѣ.

Монферрь, составившій „Энциклопедію математическихъ наукъ“ согласно съ принципами Гюена Вронскаго (впрочемъ, не заслужившими всеобщаго признанія и считающими въ числѣ своихъ противниковъ Лагранжа), только въ видѣ уступки общепринятой системѣ предпосылаетъ изложеніе ученій ариометики изложенію ученій алгебры. Дѣло въ томъ, что авторъ этой энциклопедіи желалъ бы изложить *науку* ариометики, и ему кажется (не безъ нѣкотораго основанія), что это невозможно сдѣлать, не прибѣгая къ нѣкоторымъ приемамъ общей ариометики, т. е. такъ наз. алгебры ⁽¹⁾. Зато онъ въ отцѣлъ своей энциклопедіи, трактуящемъ объ ариометикѣ, излагаетъ исключительно искусство вычисленія, предоставляя себѣ вернуться къ доказательствамъ ученій, лежащихъ въ основѣ этого искусства, въ статьѣ объ алгебрѣ.

Лагранжъ (1736—1813), авторитетъ котораго столь высоко цѣнится въ вопросахъ философски математическаго характера, желалъ бы видѣть въ ариометикѣ не только изложеніе всѣхъ дѣйствій надъ числами (включая сюда возвышеніе въ степень, извлеченіе корней и логарифмированіе), но даже рѣшеніе численныхъ уравненій высшихъ степеней, предоставляя алгебрѣ дока-

(1) M o n t c e r r i e r, Encyclopedie mathématique ou exposition complète de toutes les branches des mathématiques d'après les principes de la philosophie des mathématiques de H enri Wronski.

зывать теорію этого рѣшенія. Подобныхъ взглядовъ держится частью также и От. Коитъ въ своей „Позитивной философіи“ и въ „Synthèse subjective“ (сочиненія, достойномъ всяческаго вниманія со стороны всякаго интересующагося вопроса философіи математическихъ наукъ), а также Амперъ (1775—1836) въ опытѣ философіи математическихъ наукъ, упоминаемомъ В. Я. Буняковскимъ въ „Лексиконѣ чистой и прикладной математики“ (къ сожалѣнію, намъ не удалось познакомиться съ сочиненіемъ Ампера).

Изъ русскихъ геометровъ В. Я. Буняковскій слѣдующимъ образомъ характеризуетъ въ упомянутомъ выше „Лексиконѣ“ арифметику: „Многіе писатели затруднялись разграниченіемъ Алгебры отъ Арифметики, потому что первая изъ сихъ наукъ занимается тѣми же дѣйствіями, какъ и вторая. Но должно замѣтить, во-первыхъ, что Алгебра *доказываетъ* тѣ правила, которыми арифметика руководствуется, а во вторыхъ, что Алгебра имѣетъ предметомъ преобразованіе дѣйствій однихъ въ другія, чтобы арифметикѣ оставалось только исполненіе по возможности простѣйшихъ“. Этотъ взглядъ, впрочемъ, не раздѣляется большинствомъ составителей учебниковъ по предмету арифметики, изъ каковыхъ составителей большинство переносятъ курсы арифметики доказательствами и разсужденіями по большей части неумѣстными при вышенамѣченной точкѣ зрѣнія.

Само собою разумѣется, что можно легко представить себѣ курсы арифметики, излагающій всѣ правила безъ объясненій (и такіе курсы не были рѣдкостью до XVIII вѣка); но можно себѣ представить и такой курсъ, который излагаетъ правила съ объясненіями и мотивируетъ каждое изъ нихъ; наконецъ, возможенъ и такой курсъ, въ которомъ правила играютъ роль какъ бы второстепенную, главное же вниманіе обращено на научную сторону дѣла*). Арифметика, какъ искусство вычисленія, преслѣдуя цѣль—научить производству четырехъ дѣйствій, конечно, не доказываетъ теоремъ, лежащихъ въ основѣ ея простыхъ правилъ (ибо *доказательство* теоремъ совсѣмъ не ея дѣло), не останавливается также и на аксіомахъ, лежащихъ въ основѣ ея, и не стремится къ созданію *теоріи* дѣйствій. Арифметика въ этомъ смыслѣ, для полнаго своего усвоенія, требуетъ только умѣнія считать и *предполагаетъ* задачи, которыя дѣлали бы вычисленія необходимыми, неизбежными.

Во всякомъ случаѣ, когда рѣчь идетъ о курсахъ арифметики, преподаваемыхъ въ начальныхъ школахъ и въ низшихъ классахъ

*) Къ числу сочиненій, приближающихся къ курсу арифметико-науки, въ русской математической литературѣ могутъ быть причислены „Теоретическая арифметика“ Жозефа Вертрапа, переводъ съ измѣненіями и дополненіями г. Н. Билибина, „Арифметика“ Серре въ переводѣ г. Юденича и нѣк. друг.

ср. уч. зав., то подъ именемъ ариметика у насъ обыкновенно разумѣють (и при томъ не безъ основанія, какъ мы это видѣли выше) только сводъ *правилъ* производствъ дѣйствій надъ числами. Мотивированы ли эти правила, или нѣтъ—это, строго говоря, уже несущественны для самаго искусства вычисленія вопросъ; за-то онъ, конечно, весьма существенъ, въ случаѣ, если это искусство становится *предметомъ обученія*.

§ 3. Ариметика, какъ искусство вычисленія, должна и можетъ быть изучаема и дѣйствительно изучается въ начальной школѣ и въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній *). Это доказывается исторіею школы и обуславливается не только практическими, но также и многими педагогическими соображеніями, на которыхъ здѣсь по ихъ очевидности было бы неумѣстно останавливаться. Что же касается ариметики-науки, — то въ одномъ изъ среднихъ или даже высшихъ классовъ среднего учебнаго заведенія краткое ознакомленіе съ содержаніемъ теоретической ариметики болѣе или менѣе умѣстно, и даже необходимо. Согласно „Учебнымъ планамъ“ предметовъ, преподаваемыхъ въ мужскихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ М. И. Пр., ариметика должна быть повторена въ одномъ изъ высшихъ классовъ. Само собою разумѣется, что повтореніе курса, проходящаго въ низшихъ классахъ, тогда только очень полезно, если при этомъ особенное вниманіе обращается на теоретическіе элементы и основы этого курса. Ниже мы увидимъ — въ чемъ должно и можетъ заключаться внесеніе теоретическаго элемента въ ученія начальной ариметики. Здѣсь же должно замѣтить, что внесеніе строго-теоретическаго элемента въ курсъ ариметики умѣстно главнымъ образомъ въ одномъ изъ высшихъ классовъ среднихъ уч. зав. Что же касается курса ариметики низшихъ классовъ, то онъ, не игнорируя доступныхъ

*) Вслѣдствіе многихъ особенностей нашей начальной школы, а равно вслѣдствіе того, что она должна преслѣдовать сообщеніе дѣтямъ нѣкотораго законченнаго цикла знаній и умѣній, курсъ ариметики, въ ней проходящій, долженъ отличаться отъ курса первыхъ классовъ ср. уч. зав. (Ср. „Методику ариметики“ моего сочиненія, гл. IV — X). Печальнымъ недоразумѣніемъ былъ поэтому тотъ взглядъ на преподаваніе ариметики въ низшихъ и среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, который не такъ еще давно проводился въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ по методикѣ ариметики и въ самую жизнь нашей школы и по которому курсъ низшихъ классовъ (дѣльно съ приготовительными) среднихъ учебн. зав. почти совершенно отождествлялся съ курсомъ ариметики, умѣстнымъ въ нашей начальной школѣ. Это недоразумѣніе дѣльмъ печальнѣе, что и самое раздѣленіе курса ариметики на подготовительный и систематическій, лежащее въ основѣ сказаннаго взгляда, не выдерживаетъ критики съ логической и педагогической точекъ зрѣнія, и что и самый такъ называемый подготовительный курсъ (который рекомендовался, напр., г. Евтушевскимъ) оказался и для цѣлей среднего учебнаго заведенія, и для цѣлей начальной школы не вполне пригоднымъ.

ученикамъ низшихъ классовъ теоретическихъ основъ арифметическихъ учений, долженъ преимущественно имѣть въ виду чисто практическую и педагогическую цѣли обученія арифметикѣ.

§ 4. Различіе между наукою и учебнымъ предметомъ въ нашей методической литературѣ, вообще говоря, не игнорируется. Различія этого не признають только тѣ преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній, которые въ своемъ увлеченіи научною стороною дѣла забываютъ или игнорируютъ то обстоятельство, что наука въ истинномъ значеніи этого слова почти совершенно недоступна учащимся не только низшихъ, но и высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Такое заблужденіе, конечно, прискорбно. Но къ сожалѣнію, въ методической литературѣ недавняго времени укоренился еще болѣе прискорбный обычай *рызко противоположить* учебный предметъ наукѣ того же имени, и это повлекло за собою массу недоразумѣній иного рода, иногда вредно отзывавшихся въ ходѣ учебнаго дѣла—не только въ начальной школѣ, но также и въ приготовительныхъ классахъ мужскихъ и такъ наз. гимназій женскихъ. Дѣло въ томъ, что *противоположности* между учебнымъ предметомъ и наукою, конечно, нѣтъ и не должно быть: между ними есть и должна быть только нѣкоторая, впрочемъ, весьма существенная разница, обуславливаемая исключительно различіемъ цѣлей, ими преслѣдуемыхъ. Учебный предметъ, безусловно, не можетъ (какъ это вынесено выше) совпадать во всѣхъ своихъ частяхъ и частностяхъ съ наукою того же имени: это, повторяемъ, безусловно, и противъ такого совпаденія протестуютъ прежде всего самыя условія обученія, — условія неустранимыя и вполнѣ нормальныя: возрастъ учащихся, цѣль обученія, цѣль и характеръ данной школы и т. п. Но отъ утвержденія, что учебный предметъ и наука не одно и то же, еще очень далеко до вывода, что чѣмъ больше между ними разногласій, тѣмъ лучше будто бы поставленъ учебный предметъ *). Одно условіе (къ сожалѣнію, не принимаемое во вниманіе очень многими составителями руководствъ и учебныхъ пособій, увлекающимися только педагогическою стороною дѣла) должно быть испрѣменно соблюдаемо: данныя учебнаго предмета ни въ какомъ случаѣ не должны ни противорѣчить даннымъ научнымъ, ни даже идти съ ними, въ какомъ либо отношеніи, въ разрѣзъ.

*) Это презрѣніе къ наукѣ заходитъ иногда такъ далеко, что въ нѣкоторыхъ руководствахъ по обученію арифметикѣ и учебныхъ пособияхъ сознательно допущены обозначенія, не только не принятыя въ наукѣ, но даже прямо ею отвергаемыя. Такъ, напр., въ известномъ сочиненіи г. Паульсона („Арифметика по Грube“, изд. 12-е) не только введены новыя знаки для нѣкоторыхъ дѣлѣній, но даже рекомендована постановка дѣлителя равнѣ дѣляимаго, причемъ обыкновеніе ставить дѣлителя послѣ дѣляимаго считается чуть ли не причудомъ нѣкоторыхъ т. е. математиковъ.

Из сожалѣній, необходимость подобнаго согласія между данными учебнаго предмета и данными научными, какъ это замѣчено выше, иногда не сознается не только нѣкоторыми учителями приготовительныхъ классовъ мужскихъ учебныхъ заведеній и учительницами низшихъ классовъ заведеній женскихъ, но даже довольно многими составителями учебно-методическихъ руководствъ и пособій. Въ особенности незамѣтно это согласіе учебнаго предмета со справедливыми научными требованиями въ тѣхъ случаяхъ, когда въ основѣ обученія лежитъ такъ называемое „изученіе чиселъ“, и очень часто многія трудности, съ которыми приходится бороться учителю средняго учебнаго заведенія, обусловливаются почти исключительно тѣмъ, что въ приготовительныхъ классахъ данной мужской или въ низшихъ данной женской гимназій въ основѣ обученія ариметикѣ лежало именно это пресловутое „изученіе чиселъ“, которое, какъ мы въ томъ убѣдимся ниже, не заслуживаетъ никакого сочувствія.

§ 5. Нужно ли учителямъ среднихъ учебныхъ заведеній болѣе или менѣе близкое знакомство съ основными вопросами методики ариметики — вотъ вопросъ, котораго разрѣшеніемъ въ положительномъ смыслѣ оправдывается появленіе въ свѣтъ предлагаемаго сочиненія.

О томъ, что учителю приготовительныхъ классовъ невозможно обойтись безъ нѣкотораго методико-арифметическаго міросозерцанія, спорить, конечно, никто не будетъ: далеко недостаточно только знать арифметику и ея ученія для того, чтобы научить ребенка, вовсе не учившагося еще арифметикѣ, тому, что составляетъ ея содержаніе. Для того чтобы это, такъ сказать, первоначальное обученіе пошло какъ слѣдуетъ, учитель приготовительнаго класса, не прошедшій по большей части той школы мысли, которую проходить лицо съ высшимъ образованіемъ, долженъ непремѣнно обладать известнымъ количествомъ чисто-педагогическихъ привычекъ и методическихъ приѣмовъ совершенно независимо отъ своихъ арифметическихъ познаній. Противъ необходимости методики ариметики для учителей и учительницъ приготовительныхъ классовъ не станетъ такимъ образомъ спорить и самый завзятый противникъ всяческихъ методикъ.

Но далеко не въ томъ же смыслѣ разрѣшается обыкновенно вопросъ о методикѣ курса ариметики первыхъ трехъ классовъ гимназій и реальнахъ училищъ, а тѣмъ паче о методикѣ повторительнаго курса ариметики одного изъ высшихъ классовъ этихъ учебныхъ заведеній. Дѣло въ томъ, что курсъ арифметики среднихъ учебныхъ заведеній почему-то считается настолько близкимъ къ системѣ и изложенію учебника, что въ методикѣ этого курса какъ бы не чувствуется уже никакой потребности. На самомъ же дѣлѣ однако это совпаденіе только кажущееся.

Всякій практикъ-учитель знаетъ—сколько труда приходится затрачивать съ учениками первыхъ трехъ классовъ при выясненіи самыхъ простыхъ ариометическихъ понятій и ученій. Въ особенности много трудностей приходится преодолевать начинающему учителю, прямо съ университетской скамьи попадающему въ преподаватели какого нибудь изъ низшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. Все то, чему онъ учился въ университетѣ, оказывается весьма мало связаннымъ съ большинствомъ частныхъ вопросовъ *обученія ариометикъ*. Читателю, безъ сомнѣнія, близко знакомъ тотъ міръ математическихъ идей, въ которомъ начинающій учитель средняго учебнаго заведенія жилъ во время своего пребыванія на математическомъ факультетѣ. Этотъ міръ очень далеко отъ вопросовъ даже наилучшаго обученія четырьмя дѣтскими, и неизмѣримо превосходитъ почти новый для учителя міръ ариометическихъ идей и по богатству своею содержанія, и по изобилію въ немъ широкихъ горизонтовъ (которыхъ въ ариометикѣ очень мало). Понятно поэтому, что учителю приходится ломать и себя, и дѣтскія головы, ему довѣренныя, и что ему приходится очень долго бродить ощупью, прежде чѣмъ онъ выработаетъ себѣ какое нибудь, хоть мало-мальски стройное, учебное міросозерцаніе. Дѣло у него сначала не клеится во многихъ направленіяхъ: то онъ возлагаетъ слишкомъ много надеждъ на способность дѣтей къ отвлеченному мышленію и терпитъ неудачу, если желаетъ провести въ классѣ курсъ *высшій систематическій*—съ опредѣленіями, аксіомами, теоремами, доказательствами и всяческими обобщеніями; то онъ впадаетъ въ другую крайность и, извѣрившись въ способности дѣтей къ отвлеченному мышленію, стремится къ подробнѣйшему и полнѣйшему выясненію понятій и ученій, которые въ подобномъ выясненіи вовсе не нуждаются; то для него оказывается неразрѣшеннымъ вопросъ о томъ—что онъ преподаетъ: науку-ли ариометики или только искусство вычисленія, то его затрудняетъ проведеніе въ классѣ цѣлаго ряда такъ называемыхъ „мелкихъ“, „мелочныхъ“, „частныхъ“ ариометическихъ вопросовъ, вроде умноженія и дѣленія на дробь, дѣленія многозначнаго числа на многозначное-же, ученія о составныхъ именованныхъ числахъ, и т. д. Не подлежитъ, конечно, никакому спору, что при солидной подготовкѣ рано или поздно изъ него выработается хорошій и самостоятельно мыслящій учитель, если онъ только не станетъ лѣниться; но безспорно также и то, что руководство по методикѣ ариометики ему можетъ быть полезно къ скорѣйшему достиженію его цѣлей: оно ему можетъ раскрыть нѣкоторые области, о которыхъ онъ въ университетѣ никогда не думалъ, толкнуть на массу „мелкихъ“ вопросовъ и заставить его критически отнестись не только къ самому себѣ и своимъ приемамъ, но и къ чужимъ приемамъ и чужимъ учебнымъ міросозерцаніямъ.

Для будущихъ учителей *низшихъ* учебныхъ заведеній, въ учительскихъ семинаріяхъ и институтахъ, а также въ духовныхъ семинаріяхъ, выработаны курсы педагогики и некоторыхъ педагогическихъ дисциплинъ; не мало сдѣлано также и для пріученія будущихъ учителей *начальныхъ* школъ къ практическому приложенію, приобретенныхъ ими теоретически, педагогическихъ взглядовъ и пріемовъ. Что же касается учителей математики среднего учебнаго заведенія, то они предоставлены самимъ себѣ. Правда, у нихъ теоретическая подготовка неизмѣримо выше подготовки начального учителя, и большинство учителей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ рано или поздно выходитъ съ честью изъ трудностей учительскаго поприща. Но нельзя также отрицать, что при этомъ начинающій учитель дѣлаетъ много ошибокъ, многиѣ устранимыхъ, и приноситъ заведенію и учащимся некоторый вредъ, далеко не неизбѣжный. Въ связи съ этимъ нельзя не прійти къ заключенію, что отринуть пользу руководствъ по методикѣ арифметики, а также по методикѣ другихъ дисциплинъ такъ называемой *низшей математики* для учителей среднихъ учебныхъ заведеній, было бы довольно рискованно. Однако некоторые преподаватели математики относятся ко всякаго рода методикамъ съ большимъ или меньшимъ презрѣніемъ и высокоуміремъ, въ лучшемъ же случаѣ — съ полнымъ равнодушіемъ.

Презрительное и высокоумірное или равнодушное отношеніе ко всякаго рода методикамъ и другимъ педагогическимъ дисциплинамъ, — отношеніе, замѣчаемое въ средѣ преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній всякимъ безпристрастнымъ наблюдателемъ, объясняется, можетъ-быть, тѣмъ, что долгое время представительницей методики арифметики была пресловутая, неоднократно даже въ журналистикѣ бывшая предметомъ многочисленныхъ нападокъ, книга, вовсе не имѣющая въ виду требованій учителя среднего учебнаго заведенія. Мы говоримъ о книгѣ г. Евтушевскаго. Но, хотя такое отношеніе и объясняется частью качествами некоторыхъ сочиненій по педагогикѣ и методикѣ, однако оно не можетъ быть оправдано въ принципѣ, потому что оно не основано на сколько нибудь серьезной критикѣ педагогики, какъ науки, и методики различныхъ предметовъ обученія, какъ одной изъ дисциплинъ ея. Поэтому нельзя придавать особеннаго значенія тому мнѣнію, согласно которому хорошій учебникъ по данному предмету (напр., по арифметикѣ) можетъ учителю съ усиліемъ замѣнить руководство по методикѣ обученія этому предмету: учебникъ преслѣдуетъ чисто логическія цѣли, руководство же по методикѣ должно преслѣдовать цѣли педагогическія. Есть, правда, очень много такихъ учебниковъ, которые задаются также и цѣлями методической обработки даннаго учебнаго предмета; равнымъ образомъ есть и такія руководства по методикѣ арифмети-

ки, въ которыхъ излагаются данныя учебнаго предмета на томъ основаніи, что учителямъ де надо не только выяснитъ приемы обученія, но также и самыя данныя учебнаго предмета. Но подобное смѣшеніе понятій не приноситъ дѣлу никакой пользы, и основывать свое пренебреженіе къ методикѣ ариметики только на томъ, что есть учебники и руководства, нецѣлесообразно составленные, не вполне логично. Для учителя математики вообще и ариметики въ частности, конечно, необходимо точное знакомство его съ принятымъ его учениками учебникомъ, но этого еще недостаточно: ему равнымъ образомъ необходимо составить себѣ нѣкоторое методико-математическое (въ частности методико-аритметическое) міросозерцаніе. О томъ, что ему необходимо также и близкое знакомство съ какимъ либо теоретическимъ курсомъ по его предмету говорить, конечно, тоже не для чего: это тоже понятно само собою *). Но все это, конечно, не избавляетъ его отъ необходимости составленія какого либо методико-аритметическаго міросозерцанія.

§ 6. Методикой того или иного учебнаго предмета называется примѣненіе дидактическихъ положеній къ обученію данному предмету. Въ методикѣ ариметики учитель долженъ найти изложеніе какой либо методы обученія и указанія на нѣкоторые наиболѣе цѣлесообразныя приемы преподаванія на различныхъ ступеняхъ обученія ариметикѣ; кромѣ того въ ней должны быть изложены программа и распорядокъ курса ариметики для даннаго учебнаго заведенія. Практическое и разумное выполненіе учителемъ его обязанностей по отношенію къ учащимся почти невозможно, если онъ не будетъ заранее знать—какъ ему принятись за обученіе дѣтей данному предмету и какъ продолжать это обученіе при тѣхъ или другихъ условіяхъ. Въ виду того, что краткости громаднаго большинства нѣмецкихъ методовъ обученія ариметикѣ, которымъ у насъ особенно посчастливилось, въ средѣ мыслящихъ нашихъ педагоговъ возбуждали сомнѣнія въ необходимости даже и самой методики ариметики, мы позволили себѣ выше разъяснить, что безъ методики учебныхъ предметовъ учитель обойтись почти невозможно. Теперь еще остается вкратцѣ изложить—чего именно учитель средняго учебнаго заведенія выравѣ искать въ сочиненіи по предмету методики ариметики. Кромѣ болѣе или менѣе детализированнаго разбора трудностей и приемовъ обученія на различныхъ ступеняхъ курса, онъ выравѣ

*) Какъ на болѣе подходящія для этой послѣдней дѣли сочиненія позволимъ себѣ указать на труды Серре и Комберуса. Серре, Вертрапа, напечатанные въ русскомъ переводѣ.

требовать отъ руководства по методикѣ арифметики также и разъясненія всѣхъ методологическихъ вопросовъ арифметики, а равно полной программы курса и разъясненія роли учебника, задачника и наглядныхъ пособій при обученіи.

Во избѣжаніе недоразумѣній, считаемя нужнымъ остановиться на существенномъ различіи, существующемъ между методологическими и методическими вопросами. Методологія занимается методами науки, методами *ислѣдованія* научныхъ вопросовъ даннаго рода, методика же—только вопросами обученія; методологія рассматриваетъ *науку* съ точки зрѣнія логики, психологіи и теоріи познаний, методика же рассматриваетъ *учебный предметъ* съ точки зрѣнія наилучшаго усвоенія его учащимися. Однимъ словомъ, методологическими являются вопросы о методахъ *ислѣдованія*, открытія или нахождения законовъ данной науки, методическими же—исключительно вопросы *обученія*.

Для болѣе ясной иллюстраціи различія между методологіею данной науки и методикою даннаго учебнаго предмета можетъ послужить слѣдующій примѣръ. Въ математическомъ анализѣ однимъ изъ плодотворнѣйшихъ оружій при *ислѣдованіи* свойствъ той или иной величины или функціи служитъ такъ называемый методъ предѣловъ; методологія математическихъ наукъ не имѣетъ права игнорировать его, а напротивъ должна съ различныхъ сторонъ охарактеризовать его особенности, рассмотреть разнообразныя случаи его примѣненія, а равно охарактеризовать случаи, когда методъ этотъ непримѣнимъ, и ознакомить по возможности со всеми разновидностями этого метода. Она, кромѣ того, обязана прослѣдить сферу дѣйствія этого метода въ различныхъ отрасляхъ математическихъ наукъ и такимъ образомъ дать намъ возможность судить о методѣ предѣловъ, какъ методѣ *ислѣдованія* и открытія законовъ, которымъ подчиняются величины и функціи. Методика же обученія должна, представивъ все вышезложенное методологіи, показать—какъ наилучшимъ образомъ выяснить основанія этого метода въ различныхъ случаяхъ его примѣненія, какъ выяснить основныя теоремы этого метода, какія ученія о безконечно-малыхъ величинахъ должны быть предпосланы изложенію метода предѣловъ, какъ должно повести выясненіе учащемуся сущности этого метода, и т. п. Въ то время, стало-быть, какъ методологія можетъ коснуться исторіи метода, какъ таковой, со всѣми уклоненіями его отъ надлежащаго пути (не умачивая, напр., о пресловутомъ спорѣ философовъ о безконечно-малой величинѣ и о попыткѣ Кавальери, рассматривавшаго линію какъ совокупность точекъ, площадь какъ совокупность линій, и т. п.), методика изъ исторіи интересующаго насъ метода должна извлечь только тѣ уроки, которые непосредственно ведутъ къ наилучшему выясненію учащемуся уче-

чисель, или алгебраическому анализу. Это и очень понятно. Вопросы о свойствах чисель требуютъ часто такихъ приёмовъ, которые въ правилахъ дѣйствій надъ числами не заключаются даже неявнымъ образомъ, даже *implicit*. Арифметика занимается писменнымъ, по десятичной системѣ, обозначеніемъ чисель и ученіемъ о производствѣ дѣйствій надъ числами. Какъ только дѣло коснется вопросовъ, выходящихъ за эти довольно тѣсные предѣлы, напр.: природы какогонибудь числа или какойлибо числовой функціи, тотчасъ же въ свои права вступаютъ либо ученія теории чисель, либо же приемы алгебраическаго анализа.

Въ этомъ отношеніи, для лучшаго освѣщенія вопроса, могутъ оказаться въ высшей степени поучительными тѣ упражненія, которыми сопровождается каждая глава классическаго сочиненія Бертрана по предмету теоретическаго арифметики—сочиненія, обязательно переведеннаго на русскій языкъ Н. И. Вилибинымъ и снабженнаго явль рѣшеніями многихъ изъ предложенныхъ въ этомъ трудѣ упражненій. Подъ № 2, въ упражненіяхъ, которыми сопровождается глава первая этого сочиненія, помѣщено, напр. слѣдующее упражненіе:

„Написать натуральный рядъ чисель, начиная съ единицы и кончая числомъ, всѣ цифры котораго суть 9. Числа эти не отвлечены другъ отъ друга. Показать, что число цифръ этого ряда *m* есть цифрой единицы цифру 9, слѣдующія цифры вѣдьво суть 8, и наконецъ вѣдьво отъ этихъ цифръ—число этихъ цифръ, равныхъ 8^m “).

Для доказательства моей теоремы надо сначала эмпирически убѣдиться въ томъ, что это справедливо для ряда чисель отъ 1 до 99 и отъ 1 до 999, т. е. что въ первомъ случаѣ число цифръ равно 189, а во второмъ—2889, а потомъ надо прибѣгнуть къ пзвѣстному методу „заключенія отъ *m* къ *m* + 1“, т. е. къ методу, изобрѣтенному, кажется, Бернулли, методу стало-быть, чисто алгебраическому, и во всякомъ случаѣ, даже *implicit* не лежащему въ основѣ ученія о нумераціи.

Такимъ же или подобнымъ, выходящимъ за предѣлы собственно арифметическихъ ученій, характеромъ отличаются и

„метода Фребеля“, говоритъ объ учителѣ, что онъ учитъ „по хорошей методѣ“ и т. д., но не говоритъ „методъ Лешетинскаго“, „методъ Олендорфа“ и т. д. Это различіе въ употребленіи словъ „методъ“ и „метода“ на русскомъ языкѣ оказывается иногда весьма удобнымъ и свидѣтельствуетъ о томъ, что слово „методъ“ употребляется въ случаяхъ, когда имѣется въ виду наука и научныя точки зрѣнія, а слово „метода“—когда имѣется въ виду обученіе и приемы сто. Въ связи съ этимъ можно было охарактеризовать методологію какъ ученіе о методахъ науки, а методикку—какъ приложение методъ обученія.

*) Теоретическая арифметика Ж. Бертрана, переводъ съ 7-го изданія съ явльот. измѣненіями и дополненіями Н. Вилибина. Спб. 1885.

остальные (къ слову сказать, превосходныя) упражненія, которыми сопровождается каждая глава замѣчательнаго насѣ сочиненія: для рѣшенія однихъ требуется болѣе или менѣе полное знакомство съ алгебраическимъ языкомъ, для рѣшенія другихъ — знакомство съ помннутымъ способомъ Бернулли, для рѣшенія третьихъ — достаточное умѣние пользоваться анализомъ, какъ средствомъ рѣшенія вопросовъ, и т. д. Для примѣра приведемъ упражненія подъ №№ 3, 6 и 8, сопровождающія главу третью интересующаго насѣ сочиненія, трактующую объ умноженіи. Изъ нихъ одно требуетъ доказательства употребительнаго въ Румыніи (Cantor, Gesch. d. Math.) инструментальнаго (на пальцахъ) способа перемноженія чиселъ, заключающихся между 5-ю и 10-ю; другое представляетъ доказательство того алгебраическаго предложенія, по которому

$$s \cdot b + ac = (a + b) (b + c).$$

если:

$$s = a + b + c;$$

наконецъ, послѣднее изъ нихъ требуетъ доказательства извѣстнаго предложенія о максимумахъ, по которому произведеніе $a \cdot b$, при данной суммѣ

$$a + b = s,$$

принимаетъ наибольшее значеніе, когда $a = b$.

Легко видѣть, что всѣ подобныя свойства чиселъ и простѣйшихъ арифметическихъ функцій лежатъ въ тѣсныхъ предѣлахъ арифметическихъ ученій, хотя и могутъ быть выведены сравнительно элементарнымъ (по большей части алгебраическимъ) способомъ.

Тѣмъ не менѣе есть въ арифметикѣ и такія ученія, которыя даютъ намъ возможность говорить о методахъ чиста арифметическаго изслѣдованія, есть теоріи чисто арифметическія, есть, наконецъ, научные приемы, изученіе которыхъ подлежитъ методологии арифметики, а не методологии математики вообще.

§ 2. На первомъ планѣ, съ намѣченной выше точки зрѣнія, стоятъ самые методы арифметики-науки, какъ науки умозрительной: прежде всего построеніе системы нумераціи на совершенно произвольномъ условіи, построеніе прямыхъ дѣйствій на началѣ прямого восхожденія отъ сложенія къ умноженію, построеніе обратныхъ дѣйствій на началѣ обращенія прямыхъ вопросовъ (началѣ, играющемъ въ математикѣ столь важную роль и обогатившемъ анализъ столь блистательными открытіями, какъ теорія отрицательныхъ и комплексныхъ количествъ и теорія трансцендентныхъ функцій разнаго рода), далѣе — обобщеніе и распространеніе понятія о дѣйствіяхъ надъ дѣльными числами на дробиныя, наконецъ, построеніе на нумераціи теории десятичныхъ дробей.

Арифметика-наука есть наука умозрительная. Объектъ ея заповианъ есть число, надъ которымъ совершаются дѣйствія. Согласно взгляду, установившемуся въ русской математической литературѣ, виднѣю арифметикѣ подлежатъ только четыре дѣйствія надъ числами: сложене, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Число есть результатъ и некотораго субъективнаго психическаго процесса, немыслимаго безъ и некоторой дѣятельности нашего ума и извѣстнаго подъ именемъ счета. Уже и самая природа объекта арифметики-науки доказываетъ, что въ арифметикѣ-наукѣ получаютъ примененіе умозрительныя (а не опытный) методы изслѣдованія.

Что касается лежащей въ основѣ арифметическихъ ученій о способахъ производствѣ дѣйствій надъ числами идеи десятичной нумерации, по мнѣнію такого корифея науки, какъ Лапласъ (1749—1827), представляющей одно изъ удивительнѣйшихъ и полезнѣйшихъ изобрѣтеній человеческого ума, то она представляетъ единственный въ своемъ родѣ случай исполнѣ условнаго соглашенія относительно письменнаго обозначенія функціи извѣстнаго рода (число есть функція единицы, надъ которою совершается процессъ счета). —соглашенія столь простаго и изящнаго и столь богатаго послѣдствіями, какъ можетъ-быть ни одно изъ математическихъ обозначеній. Это соглашеніе съ методологической точки зрѣнія въ томъ отношеніи крайне интересно, что изъ него путемъ чистаго умозрѣнія могутъ быть выведены почти всѣ ученія о письменномъ производствѣ четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми числами, такъ какъ оно лежитъ въ самомъ основѣ ученій о производствѣ этихъ дѣйствій. Еще Лапласъ замѣтилъ, что о трудности додуматься до этого соглашенія можно судить по тому, что до него не додумались ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергійскій, принадлежащіе, какъ извѣстно, къ числу величайшихъ и гениальнѣйшихъ людей древности.

§ 3. Обратимся къ понятіямъ единицы, счета и числа съ методологической и другихъ точекъ зрѣнія.

Съ точки зрѣнія психологической понятія единицы, счета и числа зарождаются въ умѣ человеческомъ одновременно, и невозможно указать—какое изъ нихъ должно считать первоначальнымъ и какое производнымъ. „Понятіе о единицѣ есть фундаментъ, на которомъ построены весь анализъ,—говоритъ Гессе въ своей книгѣ „Die vier Species“ Lpz. 1872,—единица есть созданіе человеческого интеллекта, который для того, чтобы образовать это понятіе, долженъ набраться опыта... Понятіе о единицѣ невозможно заключить въ рамки опредѣленія“. Но столь же элементарнымъ характеромъ отличаются также и понятіе числа (конечно цѣлаго) и процессъ счета. Этимъ объясняется причина того, что несмотря на громадное значеніе опредѣленій въ умозрительныхъ наукахъ, опредѣленія единицы, счета и цѣлаго числа въ ~~наукахъ~~ ~~наукахъ~~

арифметической системѣ не играютъ ровно никакой роли, ибо нигдѣ не приходится ссылаться и опираться на эти опредѣленія. Кромѣ того, должно замѣтить, что ни понятіе единицы, ни понятіе счета, ни даже понятіе числа не поддаются научному опредѣленію, отъ какового требуется сведеніе даннаго понятія къ понятіямъ болѣе простымъ, первоначальнымъ (*). Что касается счета и единицы, то читателю, вѣроятно, вполне ясно, что эти понятія дѣйствительно не поддаются удовлетворяющему научнымъ требованіямъ опредѣленію; ибо сказать, что считать значитъ называть числительныя имена въ извѣстномъ порядкѣ и что единицею называется каждый изъ считаеваемыхъ предметовъ, значитъ ничего не сказать. Дѣло въ томъ, что счетъ вовсе не исчерпывается однимъ только называніемъ извѣстныхъ словъ въ извѣстномъ порядкѣ и что всякій предметъ (столъ, карандашъ, монета) есть прежде всего такой-то предметъ (столъ, карандашъ или монета), но никакъ не единица: слово „единица“, очевидно, не можетъ быть общимъ именемъ всѣхъ существующихъ предметовъ. Кромѣ того понятно, что единица и счетъ не поддаются опредѣленіямъ, на которыхъ можно было бы построить другую систему арифметики и изъ которыхъ вообще можно было бы извлечь какую либо пользу. Но читатель, можетъ быть, привыкъ встрѣчать опредѣленія понятія о цѣломъ числѣ и объ единицѣ въ учебникахъ; поэтому неизлишне, оставившись предельно на упрощеніи факта, что точное опредѣленіе этого понятія невозможно.

Число (конечно, цѣлое) многіе опредѣляютъ какъ совокупность единицъ. Это опредѣленіе прямо не вѣрно, ибо совокупность единицъ далеко еще не есть число; для того чтобы получить число, необходимо кромѣ того *сосчитать*—сколько именно единицъ въ этой совокупности? Совокупность единицъ есть условіе, и притомъ условіе необходимое, для образованія понятія числа; но одного существованія совокупности еще недостаточно для того, чтобы число было образовано: для этого требуется примѣненіе къ совокупности психическаго, субъективнаго, вовсе не даннаго въ самой совокупности, процесса, который извѣстенъ подъ именемъ счета. Стало-быть, число не есть только совокупность единицъ. Другіе опредѣляютъ число какъ результатъ измѣренія. Не говоримъ уже о томъ, что понятіе измѣренія гораздо сложнѣе понятія о числѣ и что въ процессъ измѣренія непременно вхо-

*) Болѣе или менѣе точныя опредѣленія счета и числа ведутъ къ такъ называемому кругу въ опредѣленіи: „счетъ есть процессъ получения числа“, „число есть результатъ счета“,—къ кругу, который доказываетъ, что если бы мы не знали—что такое число, то не понимали бы—что значить считать, и если бы не умѣли считать, то не знали бы—что такое число.

дить процессъ счета, какъ послѣдняя цѣль и ступень измѣренія; не говоримъ также и о томъ, что въ понятіе измѣренія такимъ образомъ входитъ также и подлежащее опредѣленію понятіе о числѣ. Но, не говоря уже обо всемъ этомъ, должно признать, что *результатомъ* измѣренія является не только число, а также и нѣкоторое знаніе, въ которомъ число играетъ одинаковую роль съ остальными элементами этого знанія. Если мы, измѣривъ длину стола, выражаемъ ее въ дюймахъ, то результатомъ этого измѣренія является не число $15\frac{1}{8}$, а вполне опредѣленный *фактъ*, что именно длина и именно этого стола, а не какой либо другой размѣръ другого предмета, равна именно $15\frac{1}{8}$ дюйма, а не другому количеству какихъ либо иныхъ единицъ. Дѣло въ томъ, что результатъ измѣренія всегда имѣетъ совершенно специальное значеніе и далеко не совпадаетъ съ числомъ, и что любое данное число, напр. шестнадцать, есть не результатъ какого-то измѣренія, а только шестнадцать—ни болѣе, ни менѣе. Столь же неточно то опредѣленіе числа, по которому числомъ называется результатъ счета: если рѣчь идетъ о дѣйствительномъ счетѣ конкретныхъ предметовъ, то результатомъ его является опять-таки нѣкоторое специальное, касающееся данного случая, знаніе; если же рѣчь идетъ о счетѣ, такъ сказать, безпредметномъ, состоящемъ въ одномъ лишь механическомъ названіи числительныхъ именъ въ извѣстномъ порядкѣ, то результатомъ такого счета является нѣкоторый рядъ *словъ*, но вовсе не самое число.

Невозможность точнаго, съ логической точки зрѣнія, опредѣленія занимающаго насъ понятія доказывается, впрочемъ, не тѣмъ, что наиболѣе употребительныя опредѣленія не точны, а тѣмъ, что это понятіе принадлежитъ къ числу первоначальныхъ, будучи тѣснѣйше, органически, если можно такъ выразиться, связано съ другими двумя понятіями (о единицѣ и счетѣ), которыми въ свою очередь столь жетѣсно связаны съ понятіемъ числа. Число немислимо безъ счета и единицы, счетъ—безъ единицы и числа, а единица немислима безъ числа и безъ процесса счета *).

*) На вопросъ о томъ—какъ это могло случиться, чтобы столь точная наука, какъ математика, въ самомъ основаніи заключала столь зыбкое понятіе, какъ понятіе единицы, упомянутой выше Гессе (принадлежащей къ числу славнѣйшихъ германскихъ геометровъ средняго столѣтія) прибѣгаетъ къ аналогіи: онъ напоминаетъ о томъ, что хотя въ мірѣ нѣтъ ни одной неподвижной матеріальной точки, но это не мѣшаетъ однако существованію прочныхъ построекъ: здавій, мостовъ и проч. Но дѣло однако не въ этомъ, ибо такая постановка вопроса не вполне вѣрна. Понятія единицы, счета и числа не только не принадлежатъ къ числу зыбкихъ, а напротивъ представляютъ собою прочныя, опредѣленныя, хотя и вполнѣ отвлеченныя понятія: при невозможности безукоризненнаго въ логическомъ отношеніи опредѣленія ихъ умъ нашъ этими понятіями владѣетъ, если такъ можно выразиться, на психологи-

§ 4. Прежде чѣмъ перейти къ теоріи арифметическихъ дѣйствій съ методологической точки зрѣнія, мы должны рассмотреть первое изъ этихъ дѣйствій, а именно дѣйствіе сложения съ точки зрѣнія логической. Изъ всѣхъ только это дѣйствіе возбуждаетъ сомнѣнія въ томъ, возможно ли точное, съ логической точки зрѣнія, опредѣленіе его. Обычныя опредѣленія этого дѣйствія, строго говоря, не выдерживаютъ критики. По этимъ доказывается только то, что опредѣленіе этого понятія не играетъ важной роли въ наукѣ, ибо въ противномъ случаѣ послѣдняя, при негочномъ опредѣленіи, не сдѣлала бы тѣхъ усилій, какіе ею на самомъ дѣлѣ сдѣланы. Съ методологической точки зрѣнія это въ высшей степени поучительно: это насъ убѣждаетъ въ томъ, что разъ какое либо понятіе не легко поддается опредѣленію, разъ обычныя опредѣленія, даваемые этому понятію, страдаютъ болѣе или менѣе очевидными недостатками, то приходится обратиться къ вопросу не столько о качествахъ (это не дѣло методологів), сколько о дѣйствительной методологической важности опредѣленія этого понятія. Въ большинствѣ случаевъ оказывается, что значеніе такихъ опредѣленій болѣею частью сильно преувеличивается и что это значеніе въ наукѣ не особенно велико. чего далеко нельзя сказать объ опредѣленіяхъ иныхъ математическихъ понятій. Въ геометріи, напр., что ни шагъ, то опредѣленіе, безъ котораго просто не обойдешься и на основаніи котораго строится цѣллыя ученія высокой научной важности. Выше мы видѣли, что хотя точныя, съ логической точки зрѣнія, опредѣленія понятій единицы, счета и числа и невозможны, но это однако вовсе не такъ вредно отзывается на дальнѣйшемъ построеніи научной системы математическихъ наукъ, какъ этого можно было ожидать, если бы эти понятія не принадлежали къ числу основныхъ, первоначальныхъ, неопредѣлимыхъ. Къ числу такихъ же понятій принадлежитъ также и понятіе сложения.

Одни опредѣляютъ сложеніе какъ соединеніе двухъ чиселъ въ одно, другіе—какъ дѣйствіе, съ помощью котораго узнаютъ сколько единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ, и т. д. Всѣ опредѣленія этого рода заключаютъ въ себѣ одну общую логико-методологическую ошибку: они замѣняютъ одно слово („сложеніе“) цѣлымъ рядомъ другихъ словъ, которыхъ смысла понять нельзя, пока намъ непонятны смыслъ и цѣль сложения. Что, въ самомъ дѣлѣ, значатъ слова „соединеніе чиселъ въ одно“, или выраженіе „сколько всѣхъ единицъ вмѣстѣ“? Эти слова именно и предполагаютъ прежде всего возможность сложения, и если кто раше,

ческомъ основаніи, т. е. на основаніи самыхъ основныхъ свойствъ души человѣческой. И таковы всѣ понятія первоначальныя, хотя и не допускающія опредѣленій, но далеко не зыбныя, а напротивъ служащія основаніемъ для построенія другихъ понятій.

какимънибудь образомъ, не уяснилъ себѣ, что такое сложене, и какую цѣль преслѣдуетъ это дѣйствіе, тотъ не будетъ также въ состояніи понять—что означаетъ „соединеніе чиселъ въ одно“ какова цѣль этого соединенія и что значатъ слова: „узнаютъ сколько единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ вмѣстѣ“.

Съ психологической точки зрѣнія, понятіе сложена возникаетъ въ умѣ человека если не одновременно съ понятіемъ счета, то по крайней мѣрѣ не значительно позже этого послѣдняго понятія. Этотъ процессъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, которые возникаютъ въ умѣ человека въ очень раннюю пору его развитія. Положите на столѣ двѣ группы спичекъ, предложите ребенку пяти или шести лѣтъ узнать—сколько здѣсь всего спичекъ, и для него будетъ трудно не отождествленіе вашего вопроса съ требованіемъ сложена, а только примѣненіе къ этому случаю еще недостаточно усвоеннаго имъ умѣнія считать; его можетъ смутить, что спичекъ на столѣ слишкомъ много; но уменьшите число спичекъ въ каждой группѣ, и вы увидите, что не самое понятіе сложена, а трудности счета смущаютъ этого ребенка.

Все это важно съ методологической точки зрѣнія, еще разъ убѣждая насъ въ томъ, что ариѳметика построена на нѣсколькихъ понятіяхъ неопредѣлимыхъ, но такъ или иначе вполне прочныхъ, и что изъ этихъ понятій тѣмъ не менѣе вытекаетъ, съ помощью чисто-умозрительныхъ приѣмовъ, цѣлый рядъ въ высшей степени стройныхъ и логически неопровержимыхъ ученій. Но какъ невозможность логически безупречнаго опредѣленія понятія счета, числа и единицы не доказываетъ невозможности *выясненія* этихъ понятій (выясненіе и опредѣленіе—двѣ вещи совершенно различны), точно такъ же невозможность и (какъ мы это видѣли) бесполезность особенно ценительнаго опредѣленія сложена не доказываетъ невозможности и бесполезности выясненія значенія термина „сложене“ при обученіи дѣтей.

Слово (терминъ) „сложене“ ребенку все-таки неизвѣстно, и ребенка, такъ или иначе, рано или поздно, надо во-время познакомить съ значеніемъ этого слова. А какъ это сдѣлать — это ужъ вопросъ методическій, о которомъ рѣчь ниже.

§ 5. Методологическое значеніе опредѣленій другихъ ариѳметическихъ понятій за-то очень важно. Въ основѣ всѣхъ этихъ опредѣленій лежатъ, какъ объ этомъ вскользь упомянуто выше, двѣ идеи: 1) идея прямолинейнаго развитія понятій о прямыхъ дѣйствіяхъ изъ понятія о сложена, и 2) идея опредѣленія обратныхъ дѣйствій въ зависимости отъ соответствующихъ прямыхъ.

Идея прямолинейнаго развитія понятія о прямыхъ дѣйствіяхъ состоитъ въ томъ, что умноженіе вытекаетъ изъ сложена, возвышеніе—изъ умноженія и что отъ возвышенія можно перейти къ новымъ (въ анализѣ неуотребительнымъ) дѣйствіямъ, какъ все это

разъяснено Ганкелемъ въ его превосходномъ сочиненіи по теоріи функций мнимаго пережбнаго.

Для того чтобы отъ сложенія перейти къ умноженію, необходимо, прежде всего, нѣкоторая спеціализація слагаемыхъ, а именно необходимо положить всѣ данныя слагаемыя равными другъ другу; подобная же спеціализація производителей необходима для третьяго прямого дѣйствія, называемаго возвышеніемъ въ степень: для того чтобы прійти къ возвышенію, необходимо положить всѣ производители даннаго произведенія равными другъ другу. Такимъ образомъ, дѣйствіе сложенія

$$a + b + c + d + \dots + k,$$

если положить

$$a = b = c = d = \dots = k,$$

обращается сначала въ

$$a + a + a + \dots + a$$

или же въ требованіе

$$a \times m,$$

гдѣ m обозначаетъ число равныхъ слагаемыхъ. Въ свою очередь дѣйствіе умноженія

$$a \times m \times n \times \dots \times p,$$

если положить

$$a = m = n = \dots = p,$$

обращается въ

$$a \times a \times a \times \dots \times a$$

или въ

$$a^q,$$

гдѣ q обозначаетъ число равныхъ производителей. Но изъ того, что равенство данныхъ чиселъ любого прямого дѣйствія *необходимо* для возникновенія новаго дѣйствія, еще не слѣдуетъ, что этого одного равенства ихъ для того вполне достаточно. Для того, чтобы новое дѣйствіе на самомъ дѣлѣ возникло, необходимо еще одно условіе: новое дѣйствіе тогда только становится дѣйствіемъ новымъ въ полномъ значеніи этого слова, когда способъ его производства чѣмънибудь отличается отъ способа производства низшаго прямого дѣйствія. Такъ, напр., недостаточно найти помощью сложенія сумму

$$365 + 365 + 365 + 365$$

или помощью умноженія произведеніе 365×365 для того, чтобы утверждать, что мы въ первомъ случаѣ имѣемъ дѣло съ умноженіемъ, а во второмъ съ возвышеніемъ; для этого необходимо имѣть также возможность пользоваться таблицей и формулою умноженія въ первомъ случаѣ, и таблицей степеней и формулами возвышенія—во второмъ.

Кромѣ того, не должно думать, что всѣ прямыя дѣйствія, какъ нише выражаются въ этомъ случаѣ, *своются* къ сложенію. Изъ сложенія возникаетъ только умноженіе, и то оно возникаетъ благодаря возможности построенія и запоминанія таблицы умноженія; возвышеніе же въ степень къ сложенію уже не имѣетъ никакого непосредственнаго отношенія и къ нему сводится только въ послѣдней своей инстанціи, такъ какъ оно возникаетъ изъ совершенно спеціальнаго случая умноженія, и опять-таки благодаря возможности примѣненія спеціальныхъ законовъ возвышенія (напр. формулы бинома Ньютона). Сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень представляють собою естественный рядъ дѣйствій; изъ этихъ дѣйствій второе возникаетъ изъ перваго, если подчинить первое нѣкоторому условію и присоединить къ нему особенную, специфическую, идею о новомъ дѣйствіи; что же касается возвышенія въ степень, то это дѣйствіе возникаетъ уже не изъ сложенія, а изъ умноженія, и при этомъ также, для его возникновенія, необходимо не только нѣкоторое условіе, но опять-таки нѣкоторая новая идея, которой въ произведеніи равныхъ производителей, строго говоря, нѣтъ; ибо какъ бы долго мы ни разсматривали сумму $3+3+3+3$ и произведенія: 365×365 или $365 \times 365 \times 365$, разсмотрѣніе сказанной суммы насъ не приведетъ къ умноженію, какъ разсмотрѣніе этихъ произведеній не приведетъ насъ ни къ возвышенію въ квадратъ, ни къ возвышенію въ кубъ.

Для лучшей иллюстраціи этой идеи, построимъ новое прямое дѣйствіе, положивъ въ возвышеніи данныя числа равными другъ другу.

Пока мы имѣемъ

$$a^1,$$

это — возвышеніе въ степень; положивъ

$$q = a,$$

получимъ

$$a^2,$$

для обозначенія котораго изберемъ, вмѣстѣ съ Ганцелемъ, символъ a_1 , такъ что

$$a^2 = a_1.$$

Точно также обозначимъ символомъ a_2 количество

$$a^2 \text{ или } a^{(a)};$$

скобки здѣсь необходимы, потому что $a^{(a)}$ не равно $(a^a)^a$.

И т. д. Сообразно съ этимъ получимъ новое дѣйствіе, которое назовемъ, напр., усиленнымъ возвышеніемъ. Оно опредѣляется слѣдующимъ рядомъ равенствъ:

$$\begin{aligned} a_1 &= a^1 \\ a_2 &= a^2 \\ a_3 &= a^{2^2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= a^{a^n} \end{aligned}$$

При этомъ легко можно опредѣлять значеніе символа a_n и вообще возможно построить некоторую теорію этого дѣйствія. Но дѣйствіе это доколь не будетъ имѣть никакого практическаго значенія и доколь ничѣмъ существеннымъ отъ возвышенія отличатся не будетъ, доколь не будетъ создапо какого либо подобія таблицамъ умноженія и возвышенія и доколь не будетъ найдено формулъ, подобныхъ формуламъ умноженія и возвышенія, т. е. формуламъ, на основаніи которыхъ были бы опредѣлены значенія функцій:

$$a_m \times a_n, (a_m)_n, \frac{a_m}{a_n}, (a+b)_m, \left(\frac{a}{b}\right)_m \text{ и т. д.}$$

Но съ методологической точки зрѣнія также интересно и то, что этимъ дѣйствіемъ, названнымъ нами усиленнымъ возвышеніемъ, ряду прямыхъ дѣйствій не положено предѣла. Положивъ въ символъ a_m указатель равнымъ основанію, получимъ новое число

$$a_a,$$

которое даетъ начало новому прямому дѣйствію. Если для обозначенія этого дѣйствія принять какой нибудь новый символъ, напр.,

$$a_1,$$

а для обозначенія числа

$$a(a_a)$$

символь

$$a_2,$$

и т. д., то новое дѣйствіе готово; по этому дѣйствію тоже недостаетъ ни формулъ, ни таблицъ, ни способовъ производства, т. е. недостаетъ того, чего недостаетъ также и предыдущему дѣйствію и что имѣется въ дѣйствіяхъ умноженія и возвышенія. Изъ этого читатель легко выведетъ, что число прямыхъ дѣйствій, съ методологической точки зрѣнія, неограниченно, хотя съ практической и научной точекъ зрѣнія до сихъ поръ изучены только три прямыхъ дѣйствія: сложеніе, умноженіе и возвышеніе въ степень, и хотя только эти три дѣйствія пока и играютъ роль въ анализѣ. Впрочемъ, по мнѣнію Ганкеля, дѣйствіе, слѣдующее за обыкновеннымъ возвышеніемъ въ степень, не имѣетъ ни практическаго, ни научнаго будущаго.

§ 6. Не менѣе интересна съ методологической точки зрѣнія идея обращенія прямыхъ дѣйствій, дающая возможность построить цѣлый рядъ новыхъ дѣйствій, называемыхъ обратными. Идея эта

вообще играть въ математикѣ въ высшей степени важную роль: ею живётъ и дышитъ цѣлая масса ученыхъ такъ называемаго высшего анализа. Стоитъ вспомнить теоріи Абелевыхъ, эллиптическихъ и т. п. функций, чтобы убѣдиться въ справедливости выше-сказаннаго *); еще проще убѣдиться въ этомъ, если принять во вниманіе, что въ основѣ ученія о логарифмическихъ, тригонометрическихъ и обратныхъ тригонометрическихъ (такъ наз. круговыхъ) функций въ большей или меньшей степени лежитъ та же идея обращенія дѣйствій.

Логическое основаніе обращенія прямыхъ дѣйствій въ низшемъ анализѣ заключается въ слѣдующемъ.

При сложеніи дано два слагаемыхъ, а требуется опредѣлить сумму ихъ; при умноженіи дано два производятели, а требуется опредѣлить ихъ произведеніе; при возвышеніи въ степень даны основаніе и показатель степени, а требуется найти самую степень. При обратныхъ же дѣйствіяхъ даны: результатъ некотораго прямого дѣйствія и одно изъ чиселъ, надъ которыми это прямое дѣйствіе произведено, а требуется опредѣлить другое изъ этихъ чиселъ. Сложеніе такимъ образомъ приводитъ къ двумъ, ничѣмъ существеннымъ другъ отъ друга не отличающимся, случаямъ вычитанія: 1) когда дана сумма двухъ слагаемыхъ и первое изъ нихъ, къ которому прибавлено второе, и 2) когда дана сумма и второе слагаемое, которое прибавлено къ первому. Умноженіе же приводитъ къ двумъ случаямъ дѣленія, отличающимся уже довольно существенно другъ отъ друга: 1) когда даны произведеніе двухъ чиселъ и множимое, а требуется отыскать множителя, и 2) когда даны произведеніе и множитель, а требуется отыскать множимое.

*) Эллиптическія функции, какъ извѣстно, получили свое названіе отъ эллиптическаго интеграла

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

въ которомъ a обозначаетъ половину большей оси эллипса, а e есть числовой эксцентриситетъ этого эллипса.

Выше данный интегралъ выражаетъ длину отрезка дуги эллипса, заключенной между концомъ малой оси и точкою эллипса, которой эксцентриса равна x , если ось y —ковъ совпадаетъ съ малой осью эллипса, а ось x —овъ—съ большою. Интегралъ этотъ не можетъ быть выраженъ въ конечномъ видѣ, но за то разлагается въ сходящуюся строку, вообще довольно сложную.

Самый интегралъ s можетъ быть разсматриваемъ какъ функция x —а, т. е. верхней границы интеграла; но и x можетъ быть разсматриваемъ какъ функция самого интеграла, т. е. величины s . Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы именно и имѣемъ дѣло съ идеею обращенія вопроса.

Наконецъ, возвышеніе въ степень приводитъ къ двумъ обратнымъ дѣйствіямъ, не имѣющимъ другъ съ другомъ ужь рѣшительно ничего общаго: 1) когда дана степень и ея показатель, а требуется найти основаніе степени (случай извлеченія корней), и 2) когда дана степень и ея основаніе и требуется найти показателя степени (случай отысканія логарифма степени, при известномъ основаніи)*).

Долго останавливаться здѣсь на послѣдствіяхъ примѣненія вышесказанной выше идеи, конечно, не для чего. Важно только то, что каждое изъ прямыхъ дѣйствій даетъ по два обратныхъ и что, по мѣрѣ восхожденія отъ сложенія къ возвышенію, обратныя дѣйствія тоже усложняются.

Но, ради полноты, здѣсь должно быть упомянуто, что при созиданіи обратныхъ дѣйствій всегда исходятъ изъ прямого, въ которомъ даны два, но не болѣе числа. Съ этой точки зрѣнія, вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію *двухъ* слагаемыхъ, дѣленіе—дѣйствіе обратное умноженію *двухъ* производителей, извлеченіе и логарифмированіе — дѣйствія, обратныя возвышенію, при которомъ даны тоже только *два* числа (основаніе и показатель степени).

§ 7. Съ методологической точки зрѣнія также чрезвычайно интересно — какое изъ ариметическихъ дѣйствій подчиняется какому изъ трехъ законовъ: перемѣстительному, сочетательному и распределительному.

Символомъ дѣйствія вообще изберемъ вопросительный знакъ, дабы не придумывать новаго знака, подобно Оюэлю, и избѣгнуть неудобствъ обозначенія, избраннаго Грасманомъ, употребляющимъ для этой цѣли знакъ сложенія. Стало-быть, занисъ

$$a ? b$$

будетъ обозначать, что надъ *a* и *b* совершено нѣкоторое дѣйствіе **). Если вообще

$$a ? b = b ? a ,$$

*) Построенное нами выше дѣйствіе усиленнаго возвышенія въ степень, даетъ существованіе двумъ обратнымъ дѣйствіямъ, опредѣляемымъ уравненіями:

$$\begin{array}{l} x_a = b \\ \text{и} \\ a_x = b , \end{array}$$

гдѣ *x* есть искомая величина. Изъ этихъ двухъ дѣйствій, первое аналогично извлеченію корней, а второе — логарифмированію. Точно также и каждое изъ остальныхъ прямыхъ дѣйствій, данныхъ выше только въ перспективѣ, имѣетъ по два обратныхъ, что въ высшей степени интересно съ методологической точки зрѣнія.

**) Нѣкоторые авторы различаютъ активное число отъ пассивнаго, считая первое слагаемое при сложеніи, уменьшаемое при вычитаніи, множимое при умноженіи, дѣлимое при дѣленіи — числами пассивными, а второе слагаемое, множителя, дѣлителя и показателя степени — активными. Не

то обозначаемое вопросительнымъ знакомъ дѣйствіе подчиняется закону перемѣстительному. Таковы не всѣ дѣйствія, а только дѣйствія сложения и умноженія, ибо всегда

$$a + b = b + a,$$

и

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

но далеко не таковы остальные дѣйствія, ибо вообще

$$a - b \text{ не равно } b - a,$$

$$a : b \text{ „ „ } b \cdot a,$$

$$a^b \text{ „ „ } b^a,$$

$$\sqrt[b]{a} \text{ „ „ } \sqrt[a]{b}.$$

$$\log_a b \text{ „ „ } \log_b a.$$

Кромѣ того, должно замѣтить, что и при умноженіи a на b величина произведенія не зависитъ отъ порядка производителей только въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ отвлеченнымъ множимымъ: въ случаѣ же именованнаго множимаго это послѣднее не можетъ быть сдѣлано множителемъ, и для того, чтобы законъ этотъ остался справедливъ также и въ этомъ случаѣ, множителю должно приписать наименование прежняго множимаго, а множимое обратить въ число отвлеченное. Объ этомъ, впрочемъ, рѣчь впереди.

Если вообще

$$a ? b ? c$$

не измѣняетъ своего значенія, какое бы изъ данныхъ чиселъ ни было поставлено первымъ, вторымъ или третьимъ, то это дѣйствіе подчиняется закону сочетательному *). Таковы дѣйствія сложения и умноженія (послѣднее только при отвлеченныхъ числахъ), но не остальные дѣйствія, въ чемъ очень легко убѣдиться.

Интересно съ методологической точки зрѣнія, что каждый изъ вышеразсмотрѣнныхъ двухъ законовъ влечетъ за собою су-

смотря на нѣкоторыя удобства этой терминологіи, мы ея ниже не держимся, считая ее вообще не особенно важной и принимая во вниманіе, что этотъ взглядъ не можетъ быть съ успѣхомъ и съ нужною въ такихъ случаяхъ очевидностью распространенъ на логарифмирование и вообще на функціи высшаго порядка, напр., на корень уравненія, на функціи тригонометрическія, и проч.

*) Для краткости порядокъ дѣйствій выше обозначается безъ скобокъ. Это значитъ, что если намъ надо обозначить, что надъ числами a и b совершенно какое либо дѣйствіе, а потомъ то же дѣйствіе совершенно надъ полученнымъ результатомъ и третьимъ числомъ c , то это обозначается просто такъ:

$$a ? b ? c.$$

ществование другого и что это можно доказать въ самомъ общемъ видѣ. Кроме того, интересно, что если перемѣстительный законъ вообще справедливъ для двухъ любыхъ чиселъ, то сочетательный справедливъ для какого угодно числа данныхъ *).

Что касается третьяго закона (закона распределительнаго), то онъ состоитъ въ томъ, что есть дѣйствія, для которыхъ

$$(a \pm b) ? c = a ? c \pm b ? c.$$

Таковы дѣйствія умноженія и дѣленія, ибо

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$$

и

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c;$$

но далеко не таковы остальные дѣйствія, ибо

$$(a \pm b) \pm c \text{ вообще не равно } a \pm c \pm (b \pm c)$$

$$(a \pm b)^c \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad a^c \pm b^c \text{**).$$

§ 8. Выше мы видѣли, что съ методологической точки зрѣнія не только самая идея, но и нѣкоторыя особенности производствъ дѣйствій составляютъ основу теорій дѣйствій. Весь вопросъ только въ томъ, какія именно особенности этого производства существенны и какія несущественны для самыхъ понятій о дѣйствіяхъ. Легко убѣдиться, что въ идею каждаго изъ прямыхъ дѣйствій входитъ не только специализація данныхъ для дѣйствій чиселъ, но и идея о той или иной таблицѣ, а для умноженія и возвышенія—также идея о нѣкоторыхъ основныхъ формулахъ дѣйствія. Поэтому не вполнѣ правиленъ тотъ взглядъ, по которому дѣйствіе умноженія характеризуется только какъ сло-

*) Читатель, надѣясь, не посягнетъ на насъ за то, что мы не доказываемъ этихъ теоремъ: доказательства эти настолько просты, что при нѣкоторомъ желаніи онъ самъ выведетъ эти доказательства. Для большей ясности приведемъ эти теоремы въ систему: 1) Если вообще

$$a ? b = b ? c,$$

то величина выраженія $a ? b ? c$ не зависитъ отъ того, которое изъ чиселъ принято за первое, которое—за второе и которое—за третье; 2) Обратное: если величина выраженія $a ? b ? c$ не зависитъ отъ того, которое изъ нихъ принято за первое, за второе и за третье, то вообще

$$a ? b = b ? a.$$

3) Если вообще $a ? b = b ? a$, то величина результата этого дѣйствія, произведеннаго послѣдовательно надъ любыми числомъ данныхъ, не зависитъ отъ того—какое изъ нихъ принято за первое, за второе и т. д. 4) Обратное: если величина результата дѣйствія, произведеннаго надъ любымъ числомъ данныхъ, не зависитъ и т. д.

***) Легко убѣдиться, что дѣйствія, слѣдующія за возвышеніемъ, да и самое возвышеніе, вѣсгѣ со всѣми возникающими изъ нихъ обратными дѣйствіями, не подчиняется ни одному изъ разсмотрѣнныхъ законовъ.

женіе равныхъ слагаемыхъ, а дѣйствіе возвышенія— только какъ перемноженіе равныхъ производителей. Не вполнѣ правильно также взглядъ (раздѣляемый, впрочемъ, очень многими авторитетами, напр., Бертрамомъ) по которому всѣ четыре арифметическихъ дѣйствія надъ числами вытекаютъ изъ понятія о такихъ же дѣйствіяхъ надъ величинами. Этотъ взглядъ не вполнѣ правиленъ потому, что умноженіе величинъ, какъ таковое, никогда не встрѣчается и часто вообще не отличается отъ сложенія ихъ: умноженіе есть чисто арифметическая идея точно такъ же, какъ и возвышеніе въ степень и слѣдующія за возвышеніемъ прямыя дѣйствія; множитель есть всегда число (а не величина), а потому дѣйствіе умноженія носитъ специфически-арифметическій отбѣсокъ, не заключающійся въ обще-математическихъ понятіяхъ о дѣйствіяхъ сложенія и вычитанія. То же справедливо частью и относительно дѣйствія дѣленія и слѣдующихъ за нимъ обратныхъ дѣйствій. Поэтому съ методологической точки зрѣнія не важно и не вполнѣ правильно образованіе понятій о всѣхъ дѣйствіяхъ надъ числами изъ понятій о дѣйствіяхъ надъ величинами: важна эта идея только для образованія понятія о сложеніи, такъ какъ практическая необходимость сложенія величинъ и агрегатовъ привела умъ человеческій, съ психологической точки зрѣнія, къ понятію о сложеніи чиселъ. Прочія же дѣйствія надъ числами въ этомъ психологическомъ началѣ, съ методологической точки зрѣнія, не нуждаются; даже болѣе того: исходя изъ величинъ, нельзя прійти ко всѣмъ дѣйствіямъ, развивающимся (прямолинейно и согласно идеѣ обращенія) изъ дѣйствія сложенія.

§ 9. Перейдемъ теперь къ системѣ опредѣленій всѣхъ арифметическихъ дѣйствій, памятуя, что каждое изъ дѣйствій, кромѣ сложенія, предполагаетъ какой нибудь специально ему свойственный способъ его производства: безъ этого допущенія образованіе понятій объ остальныхъ дѣйствіяхъ было бы ничего не стоящею игрою ума, не имѣющею ни научнаго, ни практическаго, ни даже діалектическаго значенія. Несмотря, однако, на это, самыя понятія о дѣйствіяхъ ниже неоднократно отдѣляются отъ понятія ихъ производства и часто даже какъ бы противопоставляются этому послѣднимъ. Понятіе дѣйствія принадлежитъ къ числу понятій, подчиняющихся логическимъ, психологическимъ и методологическимъ требованіямъ, хотя оно и заключаетъ въ себѣ *implicite* идею о различіи его производства отъ производства дѣйствія ему непосредственно предшествующаго (если оно принадлежитъ къ числу прямыхъ) и отъ производства прямого дѣйствія, изъ котораго оно возникло, если мы имѣли дѣло съ дѣйствіемъ обратнымъ. Производство же дѣйствія во многихъ его частностяхъ—вопросъ практическій, такъ сказать, техническій, предполагающій болѣе или менѣе искусственные приемы, которыхъ въ самомъ понятіи

даннаго дѣйствія не заключается. Понятіе дѣйствія существуетъ независимо отъ системы счисленія и отъ принятаго способа письменнаго или устнаго обозначенія чиселъ; кромѣ того складывать, вычитать и дѣлить можно и величины, совершенно независимо отъ ихъ числового значенія; производство же дѣйствія надъ числами предполагаетъ, во первыхъ, тѣ или иные числа, во вторыхъ, ту или иную систему счисленія и, въ третьихъ, наконецъ, тѣ или иные искусственныя приемы.

Прямыя дѣйствія съ логической точки зрѣнія правильнѣе всего опредѣлять въ зависимости отъ результатовъ этихъ дѣйствій: что же касается дѣйствій обратныхъ, то ихъ опредѣленія должны быть построены на понятіяхъ о соответствующихъ прямыхъ дѣйствіяхъ. Тогда система относящихся сюда опредѣленій будетъ гласить:

1) *Суммою* двухъ чиселъ называется число, которое получилось бы, если бы мы сосчитали—сколько всего единицъ во всѣхъ данныхъ числахъ, а *сложеніемъ*—дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе этой суммы *).

2) *Произведеніемъ* одного числа на другое называется число, равное суммѣ, которая получится, если первое изъ этихъ чиселъ взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ, а *умноженіемъ*—дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе этого произведенія.

3) *Степью* какого либо числа называется число, равное произведенію какого либо числа равныхъ между собою производителей; число этихъ производителей называется показателемъ степени, а *возвышеніемъ въ степень* называется дѣйствіе, цѣль котораго отысканіе степени.

Эта лѣстница прямыхъ дѣйствій можетъ быть продолжена далѣе, но въ этомъ не представляется, вслѣдствіе маловажности остальныхъ прямыхъ дѣйствій, никакой надобности. Параллельно съ данными выше опредѣленіями прямыхъ дѣйствій можетъ быть построена система опредѣленій дѣйствій обратныхъ. При этомъ нѣтъ надобности исходить изъ опредѣленій результатовъ этихъ дѣйствій, а можно (съ логико-методологической точки зрѣнія это и правильнѣе) поставить опредѣленія обратныхъ дѣйствій въ непосредственную зависимость отъ понятій о дѣйствіяхъ прямыхъ; тогда получится слѣдующая система опредѣленій:

1) *Вычитаніемъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе, по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ, другого слагаемаго.

* На это опредѣленіе должно, какъ это выяснено выше (въ § 4), смотрѣть не какъ на логически безукоризненное и методологически важное опредѣленіе этого понятія, а только какъ на разъясненіе того, въ какомъ именно значеніи употребляются термины: „сумма“ и „сложеніе“.

2) *Дѣленіемъ* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе, по данному произведенію двухъ производителей и одному изъ нихъ, другого производителя.

Это дѣйствіе распадается на два: на дѣйствіе дѣленія числа на равныя части и дѣйствіе сравненія одного числа съ другимъ въ кратномъ отношеніи. Дѣленіе числа на равныя части имѣетъ цѣлью отысканіе множимаго по данному произведенію и множителю, а кратное сравненіе — отысканіе множителя по данному произведенію и множимому. Несмотря на рѣзкую логическую разницу между этими двумя видами дѣленія, они оба выше соединены въ одно опредѣленіе, такъ какъ, съ методологической точки зрѣнія, каждый изъ этихъ видовъ дѣйствія въ ариѳметикѣ, гдѣ мы имѣемъ дѣло съ числами, легко сводится къ другому *). Этого нельзя сказать о слѣдующихъ двухъ обратныхъ дѣйствіяхъ: извлеченій корней и логарифмированію.

3) *Извлеченіемъ корня* называется дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе основанія по данной степени и ея показателю,

4) *Логарифмированіемъ же* — дѣйствіе, цѣль котораго — отысканіе показателя степени по данной степени и основанію ея.

Что касается остальныхъ обратныхъ дѣйствій, то можно ограничиться только выше (стр. 26) сдѣланнымъ указаніемъ на нихъ, тѣмъ болѣе, что для нихъ не выработано никакой терминологіи.

§ 10. Выше данная система опредѣленій имѣетъ въ виду только цѣлыя числа. Что касается чиселъ дробныхъ, то дѣйствія надъ ними представляютъ собою результатъ нѣкотораго вполне необходимаго условія. Условіе это въ высшей степени важно съ методологической точки зрѣнія и проходитъ красною нитью черезъ всѣ части математическаго анализа, имѣющія дѣло съ дѣйствіями надъ числами. Каждое изъ обратныхъ дѣйствій, за исключеніемъ логарифмированія и слѣдующихъ за нимъ, даетъ начало происхожденію чиселъ, съ чисто ариѳметической точки зрѣнія фиктивныхъ, но тѣмъ не менѣе играющихъ въ математикѣ весьма важную роль. Вычитанію обязаны своимъ существованіемъ отрицательныя числа, дѣленію — дробныя, а извлеченію — несоизмѣримыя съ единицею и комплексныя или мнимыя. Для того чтобы не дѣлать цѣлой массы ограниченней, математической анализъ, какъ извѣстно, распространяется на нихъ свое право производить надъ ними всѣ дѣйствія и при этомъ ограничиваетъ себя только въ

*) Дѣленіе *величины* на равныя части и сравненіе двухъ однородныхъ *величинъ* въ кратномъ отношеніи суть дѣйствія — съ методологической точки зрѣнія различныя. Не говоря уже о способахъ производства этихъ дѣйствій, которые для разнородныхъ величинъ вообще различны, должно замѣтить, что и самыя понятія этихъ дѣйствій надъ величинами не могутъ быть непосредственно сведены одно къ другому, пока мы находимся въ сферѣ общаго понятія о величинѣ.

одномъ отношеніи: онъ требуетъ только того, чтобы эти фиктивные числа подчинились законамъ черехъстительному, сочетательному и распределительному въ тѣхъ же предѣлахъ, въ какихъ этимъ законамъ подчиняются числа цѣлыя. Это ограниченіе налагаетъ на весь математическій анализъ свою печать и роковымъ образомъ влечетъ за собою известный рядъ опредѣлений дѣйствій надъ фиктивными числами,—опредѣлений, хотя и условныхъ, но тѣмъ не менѣе совершенно необходимыхъ.

Отрицательныя и комплексныя числа лежатъ внѣ сферы ариметики въ обычномъ значеніи этого слова, и можетъ-быть отчасти по этой причинѣ никто не сомнѣвается въ ихъ фиктивности. Дробное же число находится въ иномъ положеніи: оно входитъ не только въ арифметику, но и въ обычное числовое міросозерцаніе человѣка, и поэтому довольно трудно себѣ усвоить, что числа этого рода, строго говоря, тоже фиктивны. Фиктивность числа обуславливается сферою случаевъ, въ которыхъ оно допускаетъ примѣненія: чѣмъ шире эта сфера, тѣмъ реальнѣе, если можно такъ выразиться, кажется намъ число; наоборотъ: чѣмъ эта сфера уже, тѣмъ фиктивнѣе оно намъ кажется. Сфера примѣненія цѣлыхъ абсолютныхъ (положительныхъ) чиселъ громадна: считать можно предметы, явленія, величины, принимаемыя за единицы при измѣреніи однородныхъ съ ними величинъ, дѣлимые объекты и недѣлимые. Сфера примѣненія цѣлыхъ отрицательныхъ чиселъ не столь неограничена: отрицательнымъ можетъ быть значеніе иныхъ величинъ, но отрицательное число предметовъ дѣлимыхъ (напр. клѣбовъ), отрицательное число недѣлимыхъ предметовъ (напр., отрицательное число людей), отрицательное число явленій (напр., пушечныхъ выстрѣловъ или грозъ)—нелѣпность, *non-sens*, недоступный для ума человеческого. Узка и сфера примѣненія несоизмѣримыхъ чиселъ. Но уже всѣхъ этихъ сферъ—сфера примѣненія комплексныхъ чиселъ: только съ большимъ трудомъ постигается возможность принимать всякую точку плоскости прямоугольныхъ координатъ за олицетвореніе (за аффиксъ, какъ говорятъ въ новѣйшей литературѣ этого предмета) комплекснаго числа, вещественная часть которой откладывается на оси x —овъ, а мнимая—на оси y —ковъ; мнимое же значеніе остальныхъ величинъ находится уже въ области сверхчувственной.

Спрашивается: какова сфера примѣненія дробныхъ чиселъ? Она тоже далеко не столь всеобъемлюща, какъ сфера чиселъ цѣлыхъ: можно себѣ представить дробную часть величины, но никакъ не дробное число людей, не дробное число какихъ либо явленій, не дробное число зубьевъ въ зубчатомъ колесѣ, не дробное число клѣточекъ въ лицѣ даннаго періода его развитія. Не подлежитъ, стало-быть, сомнѣнію, что дробное число есть тоже фикція нѣкотораго рода, если только согласиться съ вышеданнымъ

критеріємъ для сужденія о фиктивности даннаго рода чиселъ. Только цѣлое абсолютное число есть неподлежащій ограниченіямъ результатъ одной изъ элементарнѣйшихъ дѣятельностей нашего ума; прочіе же роды чиселъ суть результаты исключительно аналитической и обобщающей дѣятельностей нашего ума, вовсе не обязательныя для простаго здраваго смысла.

§ 11. Сложеніе дробныхъ чиселъ, съ методологической точки зрѣнія, предполагаетъ одинаковость знаменателей данныхъ для сложенія дробей, или же, въ случаѣ различныхъ знаменателей, возможность выраженія всѣхъ дробей въ одинаковыхъ доляхъ; это послѣднее условіе предполагаетъ возможность выраженія дроби въ другихъ доляхъ безъ измѣненія ея величины. Отсюда уже легко видѣть, что понятіе сложенія дробныхъ чиселъ не только вытекаетъ изъ понятія сложенія чиселъ цѣлыхъ, но находится въ тѣсной связи и съ понятіемъ о доляхъ величины или единицы. Точно также понятіе умноженія на дробь вытекаетъ не непосредственно изъ понятія умноженія на цѣлое число, а также изъ понятія о сохраненіи, въ случаѣ дробныхъ чиселъ, неприкосновенности основныхъ законовъ умноженія. Что касается возвышенія въ дробную степень, то оно хотя тоже является обобщеніемъ понятія возвышенія въ степень съ цѣлымъ показателемъ, но все-таки не непосредственно вытекаетъ изъ понятія объ этомъ послѣднемъ дѣйствіи. Сообразно съ симъ получается слѣдующая система опредѣленій ариметическихъ дѣйствій:

1. Суммою двухъ дробныхъ чиселъ называется дробное число, равное суммѣ одинаковыхъ долей единицы, заключающихся во всѣхъ данныхъ дробяхъ вмѣстѣ, а сложеніемъ—дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе суммы данныхъ дробей *).—При этомъ понятіе суммы одинаковыхъ долей единицы предполагается извѣстнымъ.

*) Интересно замѣтить, что этимъ опредѣленіемъ ни мало не предрѣшается способъ производства дѣйствія. Такъ, напр., ничто не можетъ помѣшать намъ сдѣлать сложение

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$$

слѣдующимъ образомъ: сколько пятыхъ долей въ дроби— $\frac{3}{7}$?

$$\frac{1}{7} \text{ единицы} = \frac{5}{7} \text{ одной пятой,}$$

$$\frac{3}{7} \text{ единицы} = \frac{15}{7} \text{ одной пятой} = 2\frac{1}{7} \text{ одной пятой;}$$

но $2\frac{1}{7}$ одной пятой + 2 пятыхъ составятъ $4\frac{1}{7}$ одной пятой, т. е.

$$\frac{4}{5} \text{ единицы} + \frac{1}{7} \text{ одной пятой или}$$

$$\frac{4}{5} \text{ единицы} + \frac{1}{35} \text{ единицы}$$

каковая сумма легко преобразовывается (на подобіе предыдущей) въ сумму

$$2\frac{2}{5} + \frac{1}{35} \text{ или въ } \frac{29}{35}$$

2. Произведеніемъ какого либо числа на дробь называется произведеніе его на числителя, раздѣленное на знаменателя даннаго множителя, а умноженіемъ—дѣйствіе, цѣль котораго заключается въ отысканіи этого произведенія *).

3. Степенью съ дробнымъ показателемъ называется корень, котораго показатель равенъ знаменателю показателя, а подкоренная величина—основанію, возвышенному въ степень числителя даннаго показателя; возвышеніемъ же въ степень называется дѣйствіе, цѣль котораго—отысканіе степени **).

Легко видѣть, что въ этой лѣстницѣ опредѣленій прямыхъ дѣйствій нѣтъ той зависимости между великимъ дѣйствіемъ и ему не-

*) Въ видѣ формулы это опредѣленіе выражается такъ:

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \times n \right) : n.$$

При этомъ b можетъ равняться единицѣ, а произведеніе

$$\frac{a}{b} \times m$$

можетъ быть найдено на основаніи опредѣленія умноженія на цѣлое число; равнымъ образомъ и частное

$$\frac{a \times m}{b} : n$$

можетъ быть найдено на основаніи опредѣленія дѣленія на цѣлое число. Достойно притомъ вниманія, что выше данное опредѣленіе и всевозможныя (правильныя) опредѣленія умноженія на дробь отличаются въ самой основѣ своей стремленіемъ къ сохраненію закона перемѣстительнаго во всей его непримосовенности. Дѣйствительно, что

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b},$$

вытекаетъ изъ понятія объ умноженіи на цѣлое число. Невозможно иначе (по сущности) опредѣлить умноженіе на дробь, чѣмъ какъ это сдѣлано выше, потому что, въ противномъ случаѣ, какъ бы мы ни опредѣлили это дѣйствіе, если только

$$\frac{a}{b} \times c \text{ не равно } c \times \frac{a}{b},$$

то и самое опредѣленіе не будетъ никуда годиться.

**) Въ видѣ формулы это опредѣленіе возвышенія въ дробную степень выражается такъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a}}$$

Легко видѣть, что при этомъ опредѣленіи степени предполагается извѣстнымъ понятіе объ извлеченіи, какъ въ выше данномъ опредѣленіи умноженія предполагается понятіе о дѣйствіи дѣленія. Только понятіе сложения дробей можетъ обойтись безъ понятія объ обратномъ дѣйствіи; но это такъ только до тѣхъ поръ, пока мы вращаемся въ сферѣ абсолютныхъ чиселъ; стоитъ намъ перейти въ сферу чиселъ съ относительными значеніями (положительными и отрицательными) и эта особенность сложения тоже исчезнетъ.

посредственно предшествующимъ, которая замѣчается въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ. Что же касается системы опредѣленій обратныхъ дѣйствій, то она можетъ и, съ методологической точки зрѣнія, должна остаться совершенно та же, что и въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ. При этомъ должно замѣтить, что эта послѣдняя система опредѣленій обратныхъ дѣйствій не измѣняется ни въ какомъ изъ случаевъ, представляющихся въ анализѣ: ни въ случаѣ отрицательныхъ, ни въ случаѣ несонзвѣримыхъ, ни въ случаѣ комплексныхъ чиселъ. Это—одна изъ существеннѣйшихъ методологическихъ особенностей теорій обратныхъ дѣйствій.

§ 12. Кромѣ теорій дѣйствій, нѣкоторыя методологическія интересы представляютъ въ ариметикѣ и классификаціи разнаго рода. Вообще классификаціи въ наукахъ играютъ роль очень важную; но въ ариметикѣ, какъ мы это увидимъ ниже, значеніе обыкновенно практикуемыхъ классификацій не особенно велико.

Первая классификація, съ которою мы встрѣчаемся у нѣкоторыхъ авторовъ, это раздѣленіе предметовъ (не величинъ) на однородные и разнородные. Во введеніи къ одному изъ распространеннѣйшихъ учебныхъ руководствъ, а именно къ „Ариметикѣ“ гг. Малинина и Буренина, дается слѣдующее опредѣленіе однородныхъ и разнородныхъ предметовъ: „такіе предметы, которымъ мы можемъ дать одно названіе, наз. *однородными*, а тѣ, которымъ мы можемъ дать только разныя названія, напр. столъ и книга, перо и бумага, человѣкъ и дерево, наз. *разнородными*“ (стр. 4). Легко видѣть, что при этомъ составителями упущено изъ виду, едва ли не одно изъ самыхъ существенныхъ въ интересующемъ ихъ вопросѣ, обстоятельство, а именно то, что рѣшительно всѣ предметы однородны между собою какъ предметы, и что такихъ предметовъ нѣтъ, которымъ можно было бы дать *только* разныя названія. Ноо какъ ни разнородны составителями кажутся называемые ими столъ и книга, перо и бумага, человѣкъ и дерево, все это суть предметы, и какъ таковые—предметы непремѣнно однородные. Еще поучительнѣе окажется этотъ логическій недосмотръ, если принять во вниманіе, что для аритметики нужно воплнѣ точное понятіе объ однородныхъ предметахъ, если оно только вообще нужно. Интересно при этомъ, что сами составители, считая (въ дальнѣйшемъ изложеніи) качаніе маятника и пушечный выстрѣлъ явленіями разнородными, въ то же время говорятъ: „качанія маятника суть явленія однородныя; біенія пулеса суть также явленія однородныя; но качаніе маятника и выстрѣлъ изъ пушки суть уже два разнородныхъ явленія“. Если качаніе маятника и пушечный выстрѣлъ суть явленія воплнѣ разнородныя, то откуда взялась возможность сосчитать ихъ, говорить о нихъ, какъ о *двухъ* разнородныхъ явленіяхъ? Не остается

ни такимъ образомъ самая цѣль логическаго разграниченія однородныхъ и разнородныхъ предметовъ совершенно недостигнутою?

Съ методологической точки зрѣнія эта классификація, конечно, тоже не представляетъ никакой цѣнности: для возникновенія понятія числа необходимо считать какихъ угодно предметовъ, но вовсе не необходима невѣрная съ логической точки зрѣнія классификація предметовъ на однородные и разнородные, отъ которой счетъ вовсе не зависитъ: для того чтобы сосчитать данные предметы, каковы бы они ни были, надобна объединяющая ихъ идея; но эта идея вовсе не въ однородности предметовъ, а въ самомъ процессѣ счета, въ данномъ случаѣ примѣняемаго къ нимъ.

Далеко не то же представляетъ собою классификація *величинъ* на однородныя и разнородныя; къ сожалѣнію, польза и необходимость этой классификаціи, кажется, увлекла многихъ составителей учебниковъ по предмету ариметики на путь построенія подобной же по формѣ, но далеко не столь же существенной по содержанію, классификаціи предметовъ.

Однородными называются величины, изъ которыхъ каждая можетъ быть составлена изъ частей каждой изъ остальныхъ, *разнородными* же—величины, которыя не обладаютъ этимъ свойствомъ. Это—единственная классификація величинъ, которая имѣетъ въ ариметикѣ нѣкоторое примѣненіе *). Но важность ея замѣчается только съ момента введенія въ арифметику разнаго рода приложений, представляющихъ независимо отъ этой классификаціи весьма мало методологическаго интереса. Вышеизложенными замѣча-

*) Изъ остальныхъ классификацій можетъ быть упомянута классификація величинъ на протенсивныя (промежутки времени), экстенсивныя (пространственныя разнаго рода) и интенсивныя (силы и др. свойства, проявляющіяся въ разныхъ степеняхъ); далѣе могутъ быть упомянуты классификація величинъ на переменныя и постоянныя и классификація ихъ на зависящія и не зависящія одна отъ другой. Первая изъ упомянутыхъ классификацій въ математикѣ никакой роли не играетъ, ибо изъ всѣхъ величинъ только *математическія* входятъ въ область вѣдѣнія математическихъ наукъ; остальные же величины въ ней не изучаются. Характеристичное свойство математической величины заключается въ возможности опредѣленія суммы двухъ величинъ этого рода: если невозможно опредѣлить, что понимается подъ суммою двухъ данныхъ величинъ, то къ этимъ величинамъ ученія математики непримѣнимы. Область величинъ математическихъ съ усилками знанія, впрочемъ, все болѣе и болѣе расширяется. — Достойна упоминанія классификація величинъ на непрерывныя и прерывныя: математическія науки занимаютъ непрерывными величинами (ихъ не должно смѣшивать съ непрерывными функциями); прерывныя величины даютъ въ результатѣ цѣлыя числа, выражающія количество отдѣльныхъ предметовъ или явленій, несоставляющихъ одного цѣлаго. Съ психологической точки зрѣнія эта классификація интересна въ томъ отношеніи, что ранѣе понятія о непрерывныхъ величинахъ умъ человеческій вырабатываетъ понятіе о величинахъ прерывныхъ. Цѣлыя числа изучаются въ ариметикѣ и въ теоріи чиселъ.

ниями о дѣйствіяхъ ограничивается та часть методологіи математическихъ наукъ, въ вѣдѣніи которой находится методы арифметики. Ученія о такъ наз. именованныхъ числахъ, тройныхъ правилахъ, десятичныхъ дробяхъ и т. п. представляютъ собою только приложения арифметическихъ дѣйствій къ частнымъ вопросамъ. Единственный предметъ, представляющій здѣсь методологическій интересъ, заключается въ идеѣ замѣны дѣйствій надъ величинами соответствующими дѣйствіями надъ числами. Эта идея принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ въ анализѣ, такъ какъ ею проникнуты многія отрасли геометріи и большинство различныхъ отраслей такъ называемой математики прикладной. Пока мы имѣемъ дѣло съ величинами не измѣренными, наши знанія объ ихъ взаимныхъ отношеніяхъ иногда бывають съ практической точки зрѣнія недостаточны, и окончательную формулировку наши знанія получаютъ лишь въ тогъ моментъ, когда нами полученъ окончательный числовой результатъ, являющійся въ этомъ случаѣ какъ бы вѣнцомъ нашего знанія *).

Идея замѣны дѣйствій надъ величинами дѣйствіями надъ числами представляетъ собою основу ученій объ именованныхъ числахъ и о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ; но не только это важно съ методологической точки зрѣнія, а также то, что умъ человѣческой представляетъ себѣ дѣйствія только надъ однородными величинами. Здѣсь и кроется великое методологическое значеніе классификаціи величинъ на однородныя и разнородныя. Кромѣ того должно замѣтить, что сведеніе дѣйствій надъ величинами къ дѣйствіямъ надъ числами представляетъ собою одну изъ наиболѣ раннихъ, но тѣмъ не менѣе величайшихъ побѣдъ человѣческаго ума; мы не въ состояніи въ настоящую минуту достаточно оцѣнить ее, потому что эта идея неотдѣлима отъ всего нашего математическаго міросозерцанія.

Кромѣ упомянутыхъ, въ курсахъ по предмету арифметики встрѣчается еще классификація чиселъ на именованныя и отвлеченныя,—классификація, къ сожалѣнію, недостаточно научная, какъ мы въ томъ убѣдимся впоследствии. Эта классификація не-

*) Это, впрочемъ, несколько не умаляетъ значенія тѣхъ отраслей математической науки и науки вообще, которыя не имѣють дѣла съ числами. Ни та часть геометріи древнихъ, которая имѣетъ въ виду только форму, а не числовыя свойства фигуръ, ни т. наз. новая (синтетическая) геометрія, имѣющая въ виду проективныя и перспективныя свойства и положеніе фигуръ, ни качественный химическій анализъ (умышленно беремъ примѣръ изъ другой области вѣдѣнія), ни логика, ни языковѣдствіе, ни психологія, ни другія науки, оперирующія надъ невыразимыми въ числахъ понятіями, не теряють нравъ на уваженіе и изученіе, несмотря на то, что число въ нихъ не играетъ никакой роли. Выше имѣлась въ виду роль числа, какъ окончательнаго результата знанія нашего о величинахъ,—та роль, которая столь преувеличенно выражена извѣстнымъ мистическимъ изрѣченіемъ Пифагора о томъ, что вселенная управляется числами, а не роль числа въ знаніи вообще.

удовлетворительна въ двухъ отношеніяхъ. Во-первыхъ, кромѣ этихъ двухъ родовъ чиселъ, мы въ наукѣ и на практикѣ наталкиваемся еще на два вида чиселъ, которыхъ нельзя отнести ни къ именованнымъ, ни къ отвлеченнымъ: это—числа конкретныя, выражающія количества отдѣльныхъ предметовъ или явленій, какъ напр., числа «пять хлѣбовъ», «семь домовъ», «десять выстрѣловъ» и т. д., и числа существенно-отвлеченныя, которымъ не можетъ быть приписано никакое рѣшительно наименованіе: таковы, напр., множитель при умноженіи, дѣлитель при дѣленіи на равныя части, частное при кратномъ сравненіи, оба члена дроби, показатель степени и т. п. Во-вторыхъ, классификація чиселъ на отвлеченныя и именованныя подаетъ поводъ къ нѣкоторому недоразумѣнію, по которому на именованное число многіе склонны смотрѣть какъ на дѣйствительное число, въ то время какъ оно есть не иное что, какъ только извѣстная величина. Когда говорятъ о числѣ, то имѣютъ въ виду именно число отвлеченное,—исключительно то понятіе, которое связано съ именами числительными: ни больше, ни меньше. Пять аршинъ, строго говоря, составляютъ уже не число, а нѣкоторую длину; пять столовъ составляютъ тоже не число, а нѣкоторую совокупность извѣстныхъ предметовъ; самое же *число* аршинъ и *число* столовъ выражается только словомъ «пять». Эти соображенія, не мѣшая намъ иногда пользоваться сказанною классификаціею въ виду нѣкоторыхъ чисто-практическихъ удобствъ ея, все-таки не должны быть забываемы нами; мы должны всегда помнить: 1) что именованныя числа нецѣлесообразно и неправильно смѣшивать съ числами конкретными, не выражающими величины, не поддающимися тѣмъ преобразованіямъ, которымъ поддаются величины (превращенію и раздробленію) и не представляющими собою величины непрерывныхъ (каковыя величины выражаются числами именованными); и 2) что существуютъ такія отвлеченныя числа, которымъ по самой роли, ими исполняемой, по логическому и ариметическому смыслу ихъ, по самой сущности ихъ, нельзя приписывать никакого наименованія.

Чѣмъ выше мы станемъ подыматься по лѣстницѣ дѣйствій въ теорію употребительныхъ въ анализѣ функций, тѣмъ неизбежнѣе станетъ для насъ необходимость признанія такихъ отвлеченныхъ чиселъ, которыхъ мы часто въ ариметикѣ не имѣемъ въ виду только по забывчивости. Стоитъ обратиться къ слагаемымъ какойнибудь суммы или къ разности какихъ либо отвлеченныхъ чиселъ, чтобы увидѣть, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ числами, допускающими возможность замѣны ихъ одноименными именованными или конкретными числами. Но при умноженіи множитель, при дѣленіи—дѣлитель, при возвышеніи оба числа, при извлеченіи и логарифмированіи—тоже оба числа не могутъ принять никакого именованнаго или конкретнаго значенія: это числа отвлеченныя

раг excellence, числа, которыя дозволительно называть существенно-отвлеченными. Точно также $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ и др. тригонометрическія функции суть числа существенно-отвлеченныя, которыхъ аргументъ x есть тоже число существенно-отвлеченное *).

Такимъ образомъ упоминаемая выше классификація, съ одной стороны, не полна въ виду того, что въ ней не приняты во вниманіе существенно-отвлеченныя числа. Что же касается неполноты ея въ другомъ направленіи, то она заключается въ томъ, что ея игнорируются числа конкретныя, которыя выражаютъ не непрерывныя величины, а не совокупности отдѣльныхъ предметовъ и явленій. Таковы числа: пятнадцать стакановъ, двадцать человекъ, семьдесятъ домовъ, пятьдесятъ грозъ, выстрѣловъ и т. п. Эти числа ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть причислены ни къ роду отвлеченныхъ, ни къ роду именованныхъ чиселъ.

§ 13. Въ высшей степени интересна та особенность арифметическихъ функций (будемъ такъ называть сумму, разность, произведеніе и частное двухъ чиселъ), которая чрезвычайно важна для доказательства того, что область арифметики, строго говоря, не должна идти далѣе *четыреся* дѣйствій надъ числами.

Когда мы имѣемъ какую либо функцію какихъ либо чиселъ (будь то функція алгебраическая или трансцендентная), одинъ изъ

*) Последнее утвержденіе можетъ показаться рискованнымъ, если подъ x -омъ разумѣть число градусовъ въ некоторой дуги, которой синусъ, косинусъ или другая тригонометрическая линия берется въ данномъ случаѣ. Но это—взглядъ, не подходящій къ тому случаю, когда на эти функции смотрятъ какъ на функции въ которыхъ числа (а это сдѣлано выше) и притомъ какъ на функции, опредѣляемыя либо въ видѣ основныхъ рядовъ.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{и т. д.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{и т. д.}$$

либо въ видѣ Эйлеровыхъ формулъ:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

гдѣ e есть натуральное основаніе, а i положительное значеніе $\sqrt{-1}$; изъ этихъ послѣднихъ формулъ, а равно изъ вышедшихъ рядовъ, до очевидности ясно, что $\sin x$ и $\cos x$ суть числа существенно отвлеченныя, точно такъ же, какъ и самый аргументъ x . При этомъ, если мы имѣемъ дѣло съ синусомъ и косинусомъ дугъ или угловъ, то x въ такомъ случаѣ есть отвлеченное число, опредѣляемое равенствомъ

$$x = \frac{2 \pi \cdot n}{360},$$

гдѣ π есть существенно-отвлеченное число, выражающее отношеніе окружности къ диаметру, а n —тоже отвлеченное число градусовъ дуги, которой синусъ или косинусъ берется въ данномъ случаѣ.

первыхъ вопросовъ, представляющихся при излѣдованіи этой функціи, есть вопросъ о томъ—сколько значеній имѣетъ эта функція при данныхъ значеніяхъ ея аргументовъ. Легко видѣть, что степень съ цѣлымъ показателемъ, какъ функція, имѣетъ только одно значеніе, въ то время какъ корень съ цѣлымъ показателемъ имѣетъ столько значеній, сколько единицъ въ показателѣ корня. Такъ, квадратный корень имѣетъ два значенія, кубичный,—три, корень четвертой степени — четыре, и т. д. Не трудно доказать, какъ это и дѣлается въ анализѣ, что логарифмъ положительнаго числа (цѣлаго или дробнаго) имѣетъ безчисленное множество значеній, изъ которыхъ практическую важность представляетъ только одно, а именно вещественное его значеніе; каждая изъ тригонометрическихъ функцій имѣетъ, правда, по одному значенію для даннаго значенія аргумента, но за то каждая изъ обратныхъ тригонометрическихъ (круговыхъ) функцій имѣетъ безчисленное множество значеній. Вообще, какъ извѣстно, вопросъ о количествѣ значеній данной функціи весьма важенъ для точной характеристики ея.

Что касается функцій арифметическихъ (суммы, разности, произведеній и частнаго), то всѣ онѣ имѣютъ только по одному значенію для данныхъ значеній ихъ аргументовъ. Съ методологической точки зрѣнія интересно выяснитъ—принадлежитъ ли это свойство ихъ къ числу очевидныхъ и не допускающихъ доказательства, или же къ числу хотя и очевидныхъ, но допускающихъ таковое.

Чтобы облегчить себѣ разрѣшеніе этого вопроса, предположимъ данныя числа, т. е. аргументы, цѣлыми.

Что сумма

$$a + b$$

имѣетъ только одно, а не болѣе значеній—принадлежитъ къ числу аксіомъ; никакими разсужденіями невозможно доказать, что въ натуральномъ рядѣ чиселъ не существуетъ двухъ различныхъ чиселъ s_1 и s_2 , удовлетворяющихъ равенствамъ:

$$a + b = s_1$$

и

$$a + b = s_2.$$

Невозможность существованія двухъ различныхъ суммъ однихъ и тѣхъ же чиселъ непосредственно вытекаетъ изъ самаго понятія о числѣ и о суммѣ двухъ чиселъ, и притомъ вытекаетъ не логически (въ такомъ случаѣ мы имѣли бы дѣло съ доказательствомъ), а психологически *). Обратное предположеніе принадлежитъ уже къ

*) Считаемъ неизлишнимъ предостеречь внимательнаго читателя отъ одной методологической ошибки. Трудно противостоятъ желанію доказать сказанную истину, принявъ ее такимъ образомъ за теорему, которая допускаетъ будто бы слѣдующее доказательство отъ противнаго:

числу теоремъ, ибо это можно доказать. Оно гласить: если одно изъ слагаемыхъ суммы двухъ чиселъ равно одному изъ слагаемыхъ другой суммы двухъ слагаемыхъ и если эти суммы равны между собою, то и второе слагаемое первой суммы равно второму; дѣйствительно, если

$$a + b = a + c.$$

то непременно

$$b = c,$$

ибо въ противномъ случаѣ b должно было бы быть либо больше, либо меньше c ; а въ такомъ случаѣ $a + b$ не было бы равно $a + c$.

То свойство остальныхъ арифметическихъ функцій, по которому каждая изъ нихъ имѣетъ только по одному значенію при данныхъ значеніяхъ данныхъ чиселъ, допускаетъ для каждой изъ нихъ отдѣльное доказательство.

Такъ, что функція

$$a - b$$

имѣетъ только одно значеніе при данныхъ значеніяхъ a и b , можно доказать слѣдующимъ способомъ: пусть

$$a - b = d_1$$

и пусть, кромѣ того,

$$a - b = d_2;$$

тогда, съ одной стороны

$$a = b + d_1,$$

а съ другой

$$a = b + d_2;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$b + d_1 = b + d_2,$$

такъ какъ

$$a + b = s_1,$$

то мы, допустивъ, что

$$a + b = s_2,$$

получимъ будто бы, что

$$s_1 = s_2.$$

Но это было бы вѣрно, если бы мы знали, что $a - b$ въ обоихъ равенствахъ выражаетъ одно и то же число, а этого-то мы и не знаемъ. Приблизивъ къ подобному доказательству, можно, пожалуй, доказать, что и

$$\sqrt[4]{4}$$

имѣетъ только одно значеніе, а не два; ибо, положивъ, что

$$\sqrt[4]{4} = 2$$

и что

$$\sqrt[4]{4} = \alpha,$$

мы получили бы такимъ же точнымъ путемъ, что

$$\alpha = 2$$

или что $\sqrt[4]{4}$ имѣетъ только одно значеніе. Что невѣрно, ибо на самомъ дѣлѣ $\sqrt[4]{4}$ можетъ имѣть во второмъ случаѣ значеніе α , которое равно (-2) и которое отличается отъ перваго значенія корня.

каковое равенство, по предъидущему, возможно только тогда, когда $d_1 = d_2$.

Что и требовалось доказать.

Что функція

$$a \times b$$

имѣетъ только одно значеніе при цѣломъ b —можно доказать, принявъ во вниманіе, что

$$a \times b = a + a + a + \dots + a,$$

гдѣ число слагаемыхъ равно b .—Обратное тоже справедливо: если

$$a \times b = a \times c,$$

то непременно

$$b = c.$$

Ибо въ противномъ случаѣ, по предъидущему, $a \times b$ не могло бы равняться $a \times c$.

Что функція

$$a : b$$

имѣетъ только одно значеніе, доказывается способомъ, аналогичнымъ доказательству однозначности разности (*).

Такимъ образомъ вопросъ о числѣ значеній арифметическихъ функцій отъ цѣлыхъ чиселъ разсмотрѣнъ нами. Предоставляемъ читателю прослѣдить тотъ же вопросъ для чиселъ дробныхъ. Вопросъ о числѣ значеній арифметическихъ функцій отъ чиселъ отрицательныхъ и комплексныхъ, представляя высокой методологической интересъ, выходитъ однако за предѣлы методологіи арифметики. Читатель, безъ сомнѣнія, не посѣтуетъ на насъ что мы не сочли нужнымъ формулировать противоположныя теоремы, лежащія въ основѣ теоремъ, которыя можно принять за обратныя.

Въ связи съ разсмотрѣнною особенностью функцій, названныхъ выше болѣе или менѣе произвольно арифметическими, находится вопросъ объ ограниченіи объема арифметики только четырьмя дѣйствіями. Несмотря на то, что многіе авторитетные геометры и составители курсовъ желали бы расширить предѣлы арифметики далеко за предѣлы четырехъ дѣйствій, мы имѣемъ смѣлость присоединиться къ наиболѣе у насъ распространенному взгляду на объемъ арифметики. Если мы выше дѣлали экскурсію въ область другихъ дѣйствій, то только съ цѣлю выясненія и лучшей иллюстраціи основныхъ методологическихъ взглядовъ на теорію дѣйствій. Смѣемъ думать, что въ этой книгѣ приведено не одно

*) Только отъ двухъ ошибочныхъ приемовъ считаетъ нужнымъ предостеречь: не должно думать, что при доказательствѣ однозначности функцій

$$a - b \text{ и } a : b$$

можно пользоваться въ первомъ случаѣ вычитаніемъ, а во второмъ — дѣленіемъ. Такое доказательство было бы *petitio principii*.

основаніе правильности того взгляда на арифметику, по которому эта послѣдняя и какъ наука, и какъ предметъ обученія занимаетъ только *четырьмя* дѣйствіями надъ абсолютными (положительными) числами; но одно изъ убѣдительнѣйшихъ соображеній въ пользу этого взгляда заключается, думается намъ, въ томъ, что остальные дѣйствія совершенно неумѣстны въ арифметикѣ, какъ дѣйствія, для полнаго пониманія которыхъ необходимы такія ученія анализа, которыя часто даже въ курсахъ т. наз. низшей алгебры опускаются по причинѣ ихъ трудностей. Мы не дѣлаемъ при этомъ исключенія даже для возвышенія въ степень, ибо для этого дѣйствія нужны не только формула Ньютонова биннома, но и ученіе о двояственности значенія корня квадратнаго, тройственности кубическаго, и т. д. Ибо вопросъ о томъ сколько—значеній можетъ имѣть a въ равенствѣ

$$a^b = c$$

при дробномъ b —вопросъ очень естественный и вовсе не разрѣшаемый съ помощью однихъ ученій арифметики.

§ 14. Въ этой главѣ, преимущественно занимающейся вопросами методологическаго характера, необходимо коснуться еще двухъ вопросовъ: вопроса о методѣ арифметики-науки и вопроса о способахъ рѣшенія такъ называемыхъ арифметическихъ задачъ. Методъ арифметики науки, какъ легко убѣдиться изъ всего предъидущаго, вполне дедуктивенъ, ибо въ ней изъ общихъ понятій (о числѣ, счетѣ, единицѣ и сложеніи) и изъ произвольно принятаго условія относительно нумераціи доходимъ путемъ дедуктивнымъ до всѣхъ ученій о числѣ, о дѣйствіяхъ надъ нимъ и о способахъ производства этихъ дѣйствій.

Что касается способовъ рѣшенія такъ называемыхъ арифметическихъ задачъ, то при рѣшеніи большинства задачъ этого рода примѣняются несомнѣнно обѣ формы нашего мышленія: и анализъ, и синтезъ. (Анализъ и синтезъ, какъ извѣстно, вообще суть формы мышленія, а не методы изслѣдованія, какъ это предполагаютъ нѣкоторые). Нѣтъ такой задачи, въ которой не нашли бы примѣненія и та, и другая форма: разница заключается только въ томъ, что въ нѣкоторыхъ задачахъ анализъ совершается столь быстро, что его не замѣчаешь, и онъ сливается съ синтезомъ какъ бы во-едино. Но, строго говоря, вопросъ о рѣшеніи арифметическихъ задачъ лишь постольку входитъ въ область вѣдѣнія методологіи арифметики, постольку мы имѣемъ дѣло съ задачами арифметическими, т. е. съ такими задачами, для разрѣшенія которыхъ требуется примѣненіе только четырехъ дѣйствій безъ всякаго явнаго или скрытаго примѣненія уравненій. Вопросъ же о рѣшеніи задачъ вообще выходитъ за предѣлы методологіи

арифметики, а потому рѣчь объ этомъ вопросѣ вперемь, поскольку онъ для насъ будетъ интересенъ съ методической точки зрѣнія.

§ 15. Въ заключеніе главы позволимъ себѣ остановиться на понятіи, лежащемъ въ основѣ математическихъ наукъ и играющемъ роль, конечно, и въ арифметикѣ. Это—понятіе о величинѣ. Слово „величина“ употребляется въ жизни и наукѣ въ двойномъ смыслѣ: одно изъ значеній этого слова неопредѣлимо, и въ этомъ случаѣ понятіе величины принадлежитъ къ числу первоначальныхъ. Это—то значеніе слово, въ которомъ оно употребляется въ случаяхъ, когда имѣется въ виду величина *чего-нибудь*, напр. величина поверхности поля, величина разстоянія, величина какого либо сосуда или тѣла, величина промежутка времени, величина числа. Что называется величиною промежутка времени, величиною числа, величиною объема сосуда — опредѣлить невозможно: это понятіе принадлежитъ къ числу основныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію въ зависимости отъ другихъ понятій. (Дюгамель слѣдующимъ образомъ представляетъ себѣ то ученіе логики, по которому не всѣ понятія подлежатъ опредѣленію: опредѣленіе предполагаетъ зависимость между даннымъ понятіемъ и другими извѣстными: стало-быть нѣкоторыя понятія обязательно должны быть приняты за извѣстныя).

Но слово „величина“ часто употребляется также въ другомъ, менѣе опредѣленномъ, условномъ смыслѣ. Въ этомъ смыслѣ говорятъ о самой длинѣ, о самой поверхности, о самомъ объемѣ тѣла, о самомъ промежуткѣ времени, даже о самомъ числѣ—какъ о величинахъ; въ этомъ же смыслѣ говорятъ о величинахъ однородныхъ и разнородныхъ, прерывныхъ и непрерывныхъ, зависящихъ и независимыхъ, и т. п. Въ этотъ смыслѣ слово „величина“ есть *терминъ*, употребляемый для краткости, общее названіе всего проявляющагося въ природѣ въ разной степени, всего, дающаго намъ поводъ къ количественному сравненію. Обычныя опредѣленія этого термина неточны и, къ сожалѣнію, не могутъ быть точны, пока они опираются не осторожномъ и не-математичномъ, если можно такъ выразиться, употребленіи словъ „больше“ и „меньше“. Эти послѣднія свойства должны быть приписываемы не предметамъ и различнымъ ихъ свойствамъ, какъ это обыкновенно дѣлается, а только извѣстнымъ геометрическимъ и механическимъ и т. п. понятиямъ, отвлекаемымъ отъ вещественныхъ предметовъ, насъ окружающихъ. Такъ, строго говоря, не поле больше или меньше, а поверхность его, не стаканъ великъ или малъ, а объемъ или емкость его, и т. д. Всѣ подобныя геометрическія и механическія факція и носятъ общее названіе величины, если къ нимъ приложимы понятія о большемъ и меньшемъ. Навболѣе часто встрѣчаются въ математикѣ слѣдующія величины: длина, поверхность и площадь, объемъ, промежутокъ времени, сила, работа. Это —

величины изъ области геометріи и механики; и въ области же взаимныхъ человѣческихъ отношеній въ роли величинъ чаще всего встрѣчаются цѣности (о вѣсѣ не говоримъ, потому что это понятіе механическое). По нашему крайнему разумнію, вмѣсто сбивчивыхъ опредѣленій величины, въ курсахъ ариметики слѣдовало бы просто давать болѣе или менѣе полное перечисленіе всего того, чему въ силу изложеннаго принято въ наукѣ придавать общее названіе величины.

Какъ ни велико значеніе опредѣленій въ математикѣ съ методологической и научной точки зрѣнія, значеніе опредѣленія величины, какъ мы это легко можемъ провѣрить и съ исторической, и съ методологической точки зрѣнія, ничтожно. Исторически легко доказать, что отсутствіе точнаго опредѣленія значенія этого термина пикало не поддѣйствовало на успѣхи развитія математическихъ наукъ. Методологически же это легко доказать, занявшись пересмотромъ тѣхъ ученій, которыя зависятъ отъ этого опредѣленія: въ результатѣ окажется, что, строго говоря, въ математикѣ нѣтъ ни одного ученія, которое сколько нибудь зависѣло бы отъ опредѣленія величины *)).

Ниже мы увидимъ, что не все то, что въ наукѣ съ методологической точки зрѣнія крайне важно, въ такой же степени пригодно при обученіи данному предмету, точно также мы убѣдимся и въ томъ, что не все то, что въ наукѣ неважно, неважно также и при обученіи. Здѣсь было бы неумѣстно доказывать сказанное и вдаваться въ разсужденія по методикѣ обученія; но мы сочли все-таки умѣстнымъ предостереженіе въ указанномъ направленіи. Цѣль этой главы была преимущественно методологическая; въ связи съ методологическими разсужденіями мы позволили себѣ разъясненіе нѣкоторыхъ понятій и съ иныхъ точекъ зрѣнія, рѣдко принимаемыхъ во вниманіе. Къ ариметикѣ, какъ предмету обученія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, мы перейдемъ въ слѣдующихъ главахъ.

*) Къ сожалѣнію, пишущій эти строки не всегда такъ смотрѣлъ на методологическіе вопросы, на вопросъ объ опредѣленіяхъ вообще и на вопросъ объ опредѣленіи величины въ частности. Въ X. № 3 и 4 отд. II „Семьи и Школы“ за 1875 годъ помѣщена имъ обширная статья съ совершенно иною тенденціею, о чемъ онъ считаетъ долгомъ своимъ заявить. — Въ настоящее время мы поэтому не можемъ раздѣлять взглядовъ автора книги, въ основѣ которой лежатъ подобныя высказаннымъ нами въ упомянутой статьѣ мысли. Мы говоримъ объ „Ариметикѣ“ г. Канаева (Спб. 1881), столь доброжелательно отнесшагося къ качеству упомянутой статьи (за какую-либо доброжелательность выражаемъ автору свою благодарность). Во избѣжаніе недоразумѣній мы должны заявить, что не пишущій эти строки, а совсѣмъ другое лицо — авторъ болѣе или менѣе сочувственной рецензіи на эту книгу, помѣщенной въ свое время въ „Пед. Хроникѣ Семьи и Школы“.

Глава III.

Основные методические принципы обучения арифметикѣ.

§ 1. Цель обучения арифметикѣ.—§ 2. Обь обученіи въ раннемъ дѣтскомъ возрастѣ.—§ 3. О задыавіи дѣтскому уму только одной работы за-разъ и о принципѣ труда.—§ 4. Взгляды на обучение арифметикѣ въ разные эпохи.—§ 5. Песталоцци и его значеніе для обученія вообще и арифметикѣ въ частности.—§ 6. Метода изученія чиселъ вообще и метода Грубе въ частности.—§ 7. Истинная цѣнность методы изученія чиселъ.—§ 8. Роль задачъ и примѣровъ при обученіи арифметикѣ.—§ 9. Способы рѣшенія задачъ.—§ 10. Наглядность обученія и наглядныя пособия.—§ 11. О катехитической формѣ обученія.—§ 12. Обь учебникѣ и роли его при обученіи.

§ 1. Методика всякаго учебнаго предмета, излагая способы практическаго примѣненія общихъ дидактическихъ положеній къ частнымъ вопросамъ обученія этому предмету, неизбѣжно должна имѣть въ виду не только содержаніе даннаго предмета обученія, какъ это содержаніе выработалось въ теченіе вѣковъ въ силу практическихъ требованій и благодаря совокупнымъ усиліямъ людей науки и педагоговъ, но также и основные законы разумаго, отвѣчающаго требованіямъ дѣтской природы, обученія этому предмету. Эти законы находятся въ тѣснѣйшей связи съ тѣми условіями, которыя необходимы и достаточны для возможности усвоенія предмета умомъ ребенка и для надлежащаго умственнаго, подъ руководствомъ учителя, развитія учащагося въ данномъ направленіи.

Всякое обученіе можетъ имѣть въ виду либо практическую, либо развивательную, образовательную (формальную, какъ говаривали встарину) цѣль обученія, либо же какъ ту, такъ и другую цѣль его. Общія дидактическія положенія, смотря по тому, какая изъ цѣлей имѣется главнымъ образомъ въ виду, различны: когда мы имѣемъ при обученіи въ виду только практическую цѣль, то обученіе должно стремиться къ наискорѣйшему пріобрѣтенію дѣтymi наибольшей спаровки въ примѣненіи данныхъ знаній и умѣній; когда же мы имѣемъ въ виду образовательную цѣль обученія, то главнѣйшее наше вниманіе должно быть обращено на ту спеціальную школу мышленія, которая можетъ явиться результатомъ обученія данному предмету.

Мы имѣемъ въ виду среднее учебное заведеніе: цѣль обученія въ немъ арифметикѣ не исключительно практическая, но и не исключительно образовательная; ее можно охарактеризовать именно какъ двойкую: среднее учебное заведеніе должно и снабдить учащагося по занимающему насъ предмету обученія воз-

можно твердымъ и быстрымъ умѣнемъ прилагать свои познанія по ариаметикѣ къ частнымъ случаямъ, и открыть ему съ помощью ариаметики нѣкоторые математическіе горизонты, прививъ, если можно такъ выразиться, его уму съ помощью обученія этому предмету возможно больше полезныхъ умственныхъ навыковъ въ направленіи точнаго мышленія вообще и математическаго мышленія въ частности.

§ 2. Среднее учебное заведеніе имѣетъ дѣло съ дѣтьми не моложе 10-ти лѣтъ; только въ приготовительныхъ классахъ, гдѣ таковыя имѣются, учащему приходится имѣть дѣло съ дѣтьми, почти совсѣмъ еще не привыкшими къ класснымъ порядкамъ и къ какому бы то ни было систематическому обученію. Но даже ученики приготовительныхъ классовъ на столько обладаютъ нѣкоторыми умственными навыками, что большая часть той черной психологической работы по образованію въ дѣтскомъ умѣ понятий и усвоенію дѣтьми условнаго литературнаго языка, — той работы, которая выпадаетъ на долю учителя народной школы, — сдѣлана до поступленія дѣтей въ учебное заведеніе. Такъ, дѣти, поступающія даже въ приготовительный классъ, выработали себѣ понятіе о счетѣ, о числахъ до нѣкотораго (довольно высокаго) предѣла и т. п. Иныя уже почти прошло то время, когда крестьянскихъ ребятинекъ считали необходимымъ учить — гдѣ верхъ, гдѣ низъ, и такъ называемому всестороннему „изученію“ чиселъ, начинавшемуся съ единицы и двухъ; но не должно забывать, что если у крестьянскихъ дѣтей есть предъ городскими, можетъ быть, какія либо преимущества въ отношеніи, такъ сказать, нѣкоторой непосредственности ума, то у городскихъ, поступающихъ въ среднее учебное заведеніе, за-то болѣе развиты чисто-діалектическая сторона мышленія и умѣніе считать до довольно высокихъ предѣловъ. Эти преимущества поступающихъ въ среднее заведеніе дѣтей зависятъ не только отъ мѣста жительства и окружающей ихъ среды, предъявляющей къ нимъ довольно высокія требованія, но также отъ возраста и условій ихъ домашняго воспитанія. Въ школьномъ возрастѣ не только годъ, но часто даже мѣсяцъ много значигъ: то, что достигается въ извѣстномъ возрастѣ иногда въ мѣсяцъ почти безъ активнаго вліянія учащаго, въ болѣе раннемъ возрастѣ недостижимо при всѣхъ его усиліяхъ и въ гораздо болѣеишій промежутокъ времени.

Къ счастью для среднихъ учебныхъ заведеній, имъ не приходится особенно много заботиться объ особенностяхъ равнаго дѣтскаго возраста (до 8-ми лѣтъ): дѣти, поступающія въ приготовительные классы, не бываютъ моложе восьми лѣтъ. Такимъ образомъ основное положеніе дидактики, которое не должно быть забываемо по отношенію къ дѣтямъ моложе 8 ми лѣтъ и по которому отъ дѣтенъ этого возраста можно требовать только посте-

пенной выработки понятий и представлений, а не логической их обработки,—это положение только отчасти важно для средних учебных заведений. Это положение не должно быть забываемо учащимь постолько, поскольку оно его может избавить от грубых ошибок в случаѣ преувеличенія или способности дѣтей къ отвлеченному мышлению. Но все-таки самая черная психологическая работа дѣтей поступающихъ въ ср. уч. зав., уже сделана ими въ этого заведенія. Если данное логическое ученіе того или другого учебнаго предмета вообще, а арифметики въ частности, учащемуся приготовительнаго класса по существу своему недоступно, то учащему легко изслѣдовать — доступны ли учащемуся съ психологической точки зрѣнія понятія, входящія въ это ученіе, и опъ очень скоро убѣдится, что главнѣйшія психологическія трудности этихъ понятій ребенкомъ преодолеваются довольно скоро.

Для выработки понятій и представлений въ дѣтскомъ умѣ, сколько бы лѣтъ ребенку ни было, важна наглядность, но, конечно, лишь постолько, поскольку она вообще дозволительна въ данномъ случаѣ. Въ этомъ состоитъ второе основное дидактическое положеніе первой важности. Пока ребенокъ не умѣетъ считать—его нельзя учить арифметикѣ; пока онъ не понимаетъ самаго смысла и самой цѣли сложенія, его нельзя учить производству этого дѣйствія; пока онъ не имѣетъ яснаго представленія о дроби, его нельзя учить нахожденію частей цѣлаго, и т. д.. При этомъ научныя опредѣленія данныхъ понятій не ведутъ ни къ чему, если понятіе не выработано путемъ психологической работы, вовсе не утомительной, по требующей нѣкоторой затраты времени. Для выработки подобныхъ понятій могутъ служить очень простыя наглядныя приемы (но при этомъ нагляднымъ должно быть дѣлаемо только то, что можетъ быть сдѣлано нагляднымъ); не маловажны—въ качествѣ подготовки психологической почвы для воспріятія ученій логическаго характера—практическія, по возможности простыя задачи и рядъ вопросовъ, ставящихъ ребенка въ необходимыя и полезныя для выработки даннаго понятія условія. Какія наглядныя пособія умѣстны на какихъ ступеняхъ обученія, мы увидимъ ниже; но мы должны еще разъ повторить, что не всѣ понятія подлежатъ подобной выработкѣ, и что, напротивъ, въ арифметикѣ есть такія понятія, выработка которыхъ можетъ быть поведена только путемъ логическимъ, только путемъ болѣе или менѣе отвлеченныхъ приемовъ и рассужденій, а не путемъ чисто-психологическимъ, грубо-нагляднымъ.

§ 3. Третье положеніе общей педагогической важности заключается въ томъ, что дѣтямъ надо задавать только одну работу для каждаго даннаго момента. Это положеніе, конечно, не нуждается въ разъясненіи. Наконецъ, четвертое положеніе за-

ключается въ необходимости требованія со стороны дѣтей умственного труда хотя и посильнаго, но все-таки труда; что пріобрѣтено безъ труда, то можетъ имѣть только практическое (и то незначительное), но отнюдь не образовательное значеніе. Это, конечно, не значитъ, чтобы надо было непремѣнно по возможности затруднить ребенка, запутывая вопросъ, который самъ по себѣ ясенъ; изъ этого слѣдуетъ, что пріобрѣтеніе знанія не должно быть, въ ущербъ основательности, облегчаемо до послѣдней степени. Добытое ребенкомъ безъ его труда знаніе не имѣетъ почти никакой образовательной цѣнности, если оно только не принадлежитъ къ числу особенно щедро одаренныхъ способностями. Но, къ сожалѣнію, этотъ принципъ признается не во всѣхъ педагогическихъ системахъ: есть даже системы, требующія, чтобы ребенокъ былъ обучаемъ играя. Если бы подъ этимъ разумѣлось необходимость избѣгать физическаго принужденія, наказанія и прочихъ атрибутовъ стариннаго обученія, то эта система была бы вполне рациональна; но, къ сожалѣнію, эту систему многіе понимаютъ въ слишкомъ буквальномъ смыслѣ, и въ этомъ-то именно смыслѣ она и не заслуживаетъ ни малѣйшаго сочувствія: ученіе—трудъ, который можно и должно сдѣлать болѣе или менѣе приятнымъ для учащагося, но съ игрою, какъ таковою, этотъ трудъ не имѣетъ и не долженъ имѣть ничего общаго.

§ 4. Въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ изучается не наука ариѳметики: мы видѣли выше, что она и недоступна учащимся этихъ заведеній, и не цѣлесообразна въ роли учебнаго предмета. Кроме того, должно помнить, что очень велика разница между обученіемъ этому предмету, если обучаемый есть лицо взрослое, и обученіемъ ему дѣтей: у взрослого, какъ бы мало оно ни учился, всегда выработаны путемъ практическимъ тѣ понятія, которыя должны быть выработаны въ умѣ ребенка путемъ обученія. Понятно поэтому, что при обученіи дѣтей ариѳметикѣ приходится прибѣгать къ цѣлой совокупности особенныхъ приемовъ, которыя обыкновенно и излагаются въ сочиненіяхъ по методикѣ интересующаго насъ предмета обученія.

Но было бы ошибочно думать, что только въ новѣйшее время возникла потребность въ особенныхъ, наиболѣе соответствующихъ дѣтскому пониманію, приемахъ обученія ариѳметикѣ. Въ одномъ изъ сочиненій Платона есть даже примы указанія на необходимость сдѣлать первоначальное обученіе счету приятнымъ для дѣтей. Далѣе Платонъ придаетъ обученію ариѳметикѣ громадное воспитательное значеніе и указываетъ на пользу такого обученія дѣтей, которое основано на конкретномъ счетѣ плодовъ, вѣнковъ и т. п. предметовъ. Важность и некоторой наглядности въ обученіи ариѳметикѣ такимъ образомъ установлена еще въ древности; но въ средніе вѣка этотъ взглядъ былъ пре-

данъ незаслуженному имъ забвенію, такъ что Песталлоцци имѣетъ все-таки полное право считаться отцомъ новѣйшей педагогики, если не считать Руссо его предшественникомъ и даже учителемъ на этомъ поприщѣ.—У римлянъ, несмотря на весьма незначительное творчество этого народа на поприщѣ математики вообще и ариметики въ частности, обученіе ариметикѣ несомнѣнно занимало довольно важное мѣсто въ системѣ образованія; они, по свидѣтельству Квинтиліана, Горация и Сенеки, придавали этому обученію большое развивательное значеніе. Особенно сильно развито было у нихъ вычисленіе на пальцахъ и вообще инструментальное вычисленіе. Хотя въ литературѣ и нѣтъ подробныхъ историческихъ свидѣній объ обученіи ариметикѣ у грековъ и римлянъ, однако несомнѣнно то, что обученіе ариметикѣ у этихъ народовъ преслѣдовало не только практическія, но и развивательныя (формальныя) цѣли, что и древнихъ педагоговъ интересовали приемы обученія и что только по вѣщъ неудобныхъ системъ письменнаго обозначенія чиселъ, ариметика у этихъ народовъ не знала тѣхъ ученій, которыя составляютъ сущность и особенность современной ариметики. Особенно много трудностей представляло для древнихъ дѣйствіе дѣленія, а частью и умноженія. Но во всякомъ случаѣ обученіе ариметикѣ у грековъ и римлянъ, какъ это замѣтно выше, отличалось стремленіемъ къ наглядности и къ развитію въ дѣтяхъ не только практически полезныхъ навыковъ, но и полезныхъ навыковъ сужденія.

Своимъ современнымъ развитіемъ ариметика обязана идеѣ обозначенія чиселъ помощью десяти цифръ по десятичной системѣ,—идеѣ, которою человечество обязано индусамъ. Одинъ изъ величайшихъ геометровъ начала нынѣшняго столѣтія, Лапласъ (род. въ 1749, ум. въ 1827 г.) говоритъ о значеніи этого изобрѣтенія въ слѣдующихъ восторженныхъ выраженіяхъ: „Мысль обозначенія чиселъ помощью десяти знаковъ, основаннаго на абсолютномъ и мѣстномъ значеніи цифръ, такъ проста, что только по этой причинѣ мы забываемъ какого она достойна удивленія. Но именно эта простота и та легкость, которою ея обязано ариметическое вычисленіе, дѣлають ариметическую систему индусовъ однимъ изъ полезнѣйшихъ изобрѣтеній. На сколько трудно было изобрѣтеніе этой системы, можно судить по тому, что ее не могли изобрѣсти ни Архимедъ, ни Аполлоній Пергейскій, принадлежащіе къ числу величайшихъ и гениальнѣйшихъ людей древности.“—Не имѣя въ виду едаваться въ особенности индійской ариметики, мы должны замѣтить, что и у индусовъ обученію ариметикѣ тоже придавалось громадное развивательное значеніе.—Впослѣдствіи у арабовъ получила развитіе арифметика, уже ближе стоящая къ арифметикѣ современной, а обученіе носило характеръ тоже несомнѣнно развивательный. Но въ

западной Европѣ, по ознакомленіи ея съ ученіями арабской ариметики, обученіе начало придавать искусственнымъ приѣмамъ вычисленія и практической неизбѣжности арифметическихъ умѣній гораздо болѣе значенія, чѣмъ теорія арифметики и образовательной роли обученія этому предмету. Несмотря на массу похвалъ, въ особенности въ то время расчлаемыхъ арифметикѣ составителями учебниковъ по этому предмету въ предисловіяхъ къ нимъ, *обученіе* отличалось все-таки обычною въ западно-европейской школѣ того времени сухостью и почти полнымъ игнорированіемъ потребностей дѣтской природы. Вплоть до XVIII вѣка въ Европѣ учебники арифметики преслѣдовали главнымъ образомъ практическія цѣли и разсматривались преимущественно съ точки зрѣнія пользы, краткости, удобства; тѣмъ же характеромъ отличалось и обученіе этому предмету, тѣснѣйше связанное съ выучиваніемъ наизусть текста того или другого учебника. Съ XVIII вѣка начинается стремленіе составителей учебниковъ къ основательности, ясности, доказательности, удобопонятности и легкости изложенія. Но все-таки обученіе этому предмету отличалось повсюду прежнею догматичностью до тѣхъ поръ, пока Песталоцци не вдохнулъ жизнь въ мертвое обученіе, унаслѣдованное школою отъ среднихъ вѣковъ.

§ 5. Гейнрихъ Песталоцци родился въ Цюрихѣ въ 1746 г.; двадцати восьми лѣтъ отъ роду онъ принялъ свое истинное призваніе, т. е. призваніе учителя; на этомъ поприщѣ Песталоцци оказалъ человечеству столько несомнѣнныхъ услугъ, что онъ не безъ основанія занимаетъ одно изъ почетнѣйшихъ, если не самое почетное мѣсто въ исторіи просвѣщенія народныхъ массъ при помощи народныхъ школъ. Замѣчательна любовь его къ простому темному люду, котораго потребность въ просвѣщеніи онъ едва ли не первый понялъ и оцѣнилъ своихъ безконечно добрымъ, всегда одушевляемымъ благороднѣйшими желаніями, сердцемъ. Онъ первый понялъ необходимость учрежденія начальныхъ народныхъ школъ; онъ едва ли не первый понялъ также и громадную воспитательную роль школы; онъ первый понялъ и непригодность до него практиковавшагося мертвящаго догматическаго обученія.—Къ сожалѣнію, методикѣ обученія интересующему насъ предмету онъ далъ не то направленіе, которое обусловливается самымъ характеромъ этого предмета, а направленіе, сильно уклоняющееся отъ требованій самаго предмета. Онъ, къ сожалѣнію, дошелъ до мысли о томъ, что для достиженія педагогическихъ цѣлей должно измѣнить не только приѣмы обученія, но и самое содержаніе этого предмета. Песталоцци не былъ специалистомъ-математикомъ, и хотя это одно и не могло помѣшать ему создать надлежащую методу обученія арифметикѣ, по онъ не исполнилъ ясно понимать, какъ это доказано Рудольфомъ

Книллингомъ *). сущность, специальную природу арифметики науки и арифметики-искусства, что и оказало на последующее развитие методико-арифметических системъ прямо вредное вліяніе.

„Нѣтъ предмета, говоритъ Книллинъ.—болѣе сухого и трезваго, чѣмъ арифметика, и именно въ этомъ предметѣ, какъ это ни странно, педагоги предавались мечтаніямъ и оргіямъ, самымъ безумнымъ, самымъ головокружительнымъ (sinvergügendste)“. Причиной этого страннаго явленія Книллинъ считаетъ мечтательный складъ Песталоцціевой натуры, а также отсутствіе у познѣйшихъ составителей методико-арифметическихъ системъ критическаго взгляда на заслуги Песталоцци. По его мнѣнію, именно то, что великаго мечтателя сдѣлало великимъ реформаторомъ педагогики вообще, сдѣлало его также и очень плохимъ «методикомъ» арифметики. „Педагогическій реформаторъ высшаго порядка непременно долженъ быть немножко мечтателемъ: его сердце должно быть преисполнено любовью къ дѣтямъ, къ народу, къ человечеству; его мысли и стремленія, чувства и желанія должны всецѣло поглощаться великою идеею воспитанія; только въ такомъ случаѣ онъ можетъ оставить людямъ въ наслѣдье что-либо вѣчное, только въ такомъ случаѣ онъ можетъ своихъ современниковъ сдѣлать скольконибудь причастными своимъ, возвышающимъ душу, благороднымъ и прекраснымъ мечтаніямъ. Творецъ же топ или иной методико-арифметической системы долженъ прежде всего трезво и ясно смотрѣть на свое дѣло. Энтузіазмъ можетъ быть выдающимся педагогомъ вообще, но отнюдь не хорошимъ специалистомъ по части арифметики“. Песталоцци, по мнѣнію Книллинга, нисколько не можетъ, по этому, претендовать на непогрѣшимость въ вопросахъ обученія арифметикѣ, и его „наглядное изученіе числовыхъ соотношеній“ должно быть непременно подвергнуто самой строгой критикѣ: всякаго рода мечтанія могутъ быть только переходною стадіей развитія, которая должна быть неизбѣжно смѣнена болѣе трезвымъ уясненіемъ себѣ дѣлей этихъ мечтаній и средствъ къ ихъ достиженію, если мечтанія того достойны, или же средствъ къ замѣнѣ ихъ чѣмъ нибудь болѣе реальнымъ.

Однако мы однако не должны забывать, что заслуга Песталоцци предъ обученіемъ арифметикѣ заключается не въ разнаго рода изобрѣтенныхъ имъ приѣмахъ, а въ сознаніи, что догматическое по учебникамъ обученіе не отвѣчаетъ потребностямъ дѣтской природы. Что онъ достигалъ при своемъ обученіи блестя-

*) Rud. Knilling, Zur Reform des Rechenunterrichts, München. 1884. Ср. статью иппушанаго эти строки, подъ заглавіемъ „На арифметическомъ пути“ въ № 10 педагогическаго отдѣла „Семья и Школа“ за 1885 годъ.

щихъ результатовъ, объявляется исключительно его высокими личными педагогическими качествами. Но что онъ принесъ дальнѣйшему развитію обученія ариѳметикѣ несомнѣнный вредъ, пріучивъ педагоговъ игнорировать требованія ариѳметики какъ таковой, и введя въ обиходъ педагогической мысли презрѣніе къ этимъ требованіямъ—тоже не подлежитъ сомнѣнію. Неудивительно поэтому, что не разъ цитованный нами Кнудлингъ говоритъ: „Грядущія поколѣнія, можетъ быть, даже въ ближайшемъ будущемъ, откажутся достигнуть—какъ это можно было въ теченіе цѣлаго столѣтія преклониться предъ Песталоцци, какъ преть замѣчательнѣйшимъ авторомъ по предмету методики ариѳметики. Только благодаря тому, что собственная метода нашего учителя давнымъ-давно забыта, такъ что на нѣсколько тысячъ человекъ, интересующихся этимъ предметомъ, лишь одинъ, можетъ быть, обладаетъ точнымъ знаніемъ ея, Песталоцци, какъ творецъ метода для обученія ариѳметикѣ, доселѣ не лишенъ еще своего почтеннаго положенія (Ansehen) и доселѣ еще не оцѣненъ въ этомъ отношеніи сообразно своимъ дѣйствительнымъ заслугамъ, т. е. болѣе правильно, но и менѣе восторженно“ (стр. 64). Еще рѣзче Кнудлингъ формулируетъ свои мысли на 103-й стр.: „Песталоцци принесъ развитію обученія ариѳметикѣ болѣе вреда, чѣмъ пользы. Его принципы, въ томъ числѣ главнымъ образомъ принципъ наглядности, оказались колодками (Schwemmschiffe), которыя могли только отерочить болѣе практичную форму обученія на многія десятилѣтія“.

Главнѣйшія заслуги Песталоцци предъ обученіемъ интересующему насъ предмету состоятъ въ установленіи имъ принципа, по которому все изучаемое ребенкомъ должно быть имъ понимаемо, и въ формулировкѣ требованія, чтобы плоды обученія ариѳметикѣ были доступны *простому народу*, въ своей ежедневной жизни нуждающемуся въ ариѳметическихъ умѣніяхъ. Кроме того достойно упоминаемъ также и то, что Песталоцци едва ли не первый попятъ несомнѣнное значеніе умственныхъ вычисленій.

§ 6. Главнѣйшее заблужденіе Песталоцци, оказавшее на все послѣдующее развитіе методики ариѳметики далеко неблагопріятное вліяніе, заключалось въ ошибочномъ взглядѣ его на число и природу этого послѣдняго. съ одной стороны, и на дѣли обученія ариѳметикѣ, съ другой. Не разъ цитированный выше Кнудлингъ сопоставилъ всѣ относящіяся къ занимающему насъ вопросу убѣжденія Песталоцци: изъ обзора этихъ убѣжденій какъ нельзя болѣе явствуетъ, что Песталоцци далеко не вѣрно представлялъ себѣ психологическую природу и числа основы ариѳметики, какъ науки и предмета обученія. Наиболѣе печальныя послѣдствія повлекли за собою разсужденія Песталоцци о необходимости ясныхъ представленій о каждомъ числѣ въ отдѣльности и обо всѣхъ его число-

выхъ отношенійхъ къ другимъ числамъ. Эта идея, въ дальнѣйшемъ и весьма послѣдовательномъ своемъ развитіи, получила наиболѣе полное выраженіе въ методѣ такъ называемаго „несторонняго“ изученія чиселъ, придуманной нѣмецкимъ педагогомъ, А. В. Грубе. Большинство методъ начального обученія, извѣстныхъ въ Россіи, болѣе или менѣе тѣсно соприкасаются съ методомъ Грубе. Мы не станемъ разсматривать каждую изъ наиболѣе распространенныхъ методъ въ отдѣльности, а позволимъ себѣ отослать читателя интересующагося литературою этого предмета къ сочиненію пишущаго эти строки, составленному преимущественно для народныхъ учителей и учительницъ, подъ заглавіемъ „Методика ариѳметики съ приложеніемъ Сборника упражненій по ариѳметикѣ для учащихся“ (М. 1886).

Здѣсь считаемъ нужнымъ только охарактеризировать методу Грубе безъ всякаго отношенія къ ея примѣнимости или непримѣнимости къ потребностямъ русской начальной школы, но не упуская изъ виду непригодность ея для приготовительныхъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній *).

Весь первый курсъ (весь курсъ ариѳметики распадается у Грубе на три отдѣла) состоитъ изъ дѣлныхъ ста ступеней (Stufen) по количеству тѣхъ чиселъ, палъ которыми производятся вычисления: на первой ступени проходитъ число „одинъ“, на второй число „два“, на третьей—число „три“, и т. д. до сотой ступени включительно. Методическія указанія Грубе относительно перваго курса заключаются, вкратцѣ, въ слѣдующемъ: 1) урокъ счета долженъ быть непременно также и урокомъ родного языка; 2) учитель, отказываясь, воздерживаясь отъ многочисленныхъ вопросовъ, долженъ, по возможности, заставлять самихъ учащихся говорить и высказываться; 3) хоровые и отдѣльные отвѣты должны чередоваться между собою; 4) пособіями должны служить преимущественно пальцы и черточки; 5) *дѣйствія надъ числами состоятъ просто въ томъ, что каждое новое число сравнивается съ предыдущими*, при чемъ будто бы укрѣпляется (befestigt) предствленіе каждаго числа; и 6) на красивое изображеніе цифръ и черточекъ должно быть употреблено достаточное количество времени. — Большинство этихъ указаній, благодаря своей общности и неопредѣленности, вообще справедливы, а нѣкоторыя даже заслуживаютъ полнаго одобренія, наприм., совѣтъ относительно воздержанія отъ многочисленныхъ вопросовъ; *серьезныя же выраженія* вызываются только 5-ымъ положеніемъ: центръ тяжести

*) Полное заглавіе послѣдняго изданія сочиненія Грубе гласитъ: Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. Ein methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht. von A. W. Grube. Berlin. 1881. Einslin.

обученія счету заключается въ подробномъ, „монографическомъ“, какъ этотъ способъ названъ, кажется, А. Н. Гольденбергомъ, изученіи cadaго изъ чиселъ. Чтобы уяснить себѣ ходъ уроковъ какой либо ступени, какъ они понимаются самими изобрѣтателемъ методы, возьмемъ на удачу седьмую ступень и прослѣдимъ ту идею, которая лежитъ въ основѣ этой методы. Обратимся къ стр. 37-ой сочиненія Грубе; тамъ изображено (всѣ подстрочныя примѣчанія принадлежатъ пишущему эти строки):

СЕДЬМАЯ СТУПЕНЬ.

Семь.		
I. а.		7.
	1	
	1	
	1	{
	1	
	1	$7 \times 1 = 7.$
	1	{
	1	
	1	$1 : 7 = 7. *$
	1	
	2	$2+2+2+1=7.$
	2	{
	2	
	2	$7-2-2-2=1.$
	1	$2 : 7 = 3 (1). **$
	3	$3+3+1=7.$
	3	{
	3	
	1	$7-3-3=1.$
	1	$3 : 7 = 2 (1). ***$
	4	$4+3=7, 3+4=7.$
	4	{
	4	
	3	$7-4=3, 7-3=4.$
	3	$4 : 7 = 1 (3).$
	5	$5+2=7, 2+5=7.$
	5	{
	5	
	2	$7-5=2.$
	2	$5 : 7 = 1 (2).$
	6	$6+1=7, 1+6=7.$
	6	{
	6	
	1	$7-6=1.$
	1	$6 : 6 = 1 (1).$

*) Эта часть таблицы изображаетъ изученіе числа семь въ связи съ единицею, при чемъ 1 : 7 изображаетъ то же, что въ болѣе или менѣе научныхъ курсахъ пришло изображать знаменитіемъ 7 : 1.

**) Здѣсь дана схема изученія семи по отношенію къ двумъ.

***) Это—схема изученія семи въ связи съ тремя, и т. д.

„Изобразите семь точек и считайте! Одна! — сколько еще не хватает двоек? Две! — сколько не хватает единиц? и т. д.

„Какъ отецъ роздалъ семь яблокъ двумъ, тремъ, четыремъ дѣтямъ?

$$7=6-1, 5+2, 4+3 \text{ и т. д.}$$

$$6=7-1, 5+1 \text{ и т. д.}$$

$$5=7-2 \text{ и т. д. *)}$$

„Изъ какихъ равныхъ чиселъ образовалось 7?

„b. Карлъ получилъ одинъ пятакъ (пять пфениговъ) и одинъ пфенигъ, и еще одинъ пфенигъ, и отдалъ изъ своихъ денегъ 2 пф. и еще 1 пф. и еще одинъ пф. Сколько у него останется?

„c. Отъ какого числа ты можешь семь разъ отнять единицу **)?

„На слѣдующіе примѣры должны быть даваемы скорые отвѣты, если ихъ задавать не слишкомъ быстро, но и не прерывая рѣчи:

$$3 \times 2 + 1 - 2 \times 3 + 4 - 3 \times 3 - 1?$$

$$2 + 1 + 2 + 1 + 1? 1 + 2 + 1 - 2 + 1?$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1?$$

„Какое число заключается 7 разъ въ 7-ми?

„Къ какому числу я долженъ прибавить утроенную двойку, чтобы получать 7?

„Я беру нѣкоторое число 2 раза и получаю единицею меньше 7-и? Какое число я удвоилъ?

„Когда я беру число два раза и получаю единицею меньше 7-и, то я получаю 6. Но число, которое я взялъ два раза, есть 3, потому что $6=2 \times 3$, слѣдовательно, я долженъ 3 удвоить, чтобы получить единицею меньше семи ***)).

*) Т. е. $4=7-3$, $3=7-4$, $2=7-5$ и т. д. Все замѣченное должно быть „изучено“.

**) Вопросъ, могущій сбить съ толку учащагося; онъ неопредѣленъ и почти не допускаетъ того отвѣта, котораго Грубе добивается.

***) Совершенно невѣрное разсужденіе. Когда я беру число два раза и получаю единицею меньше семи, то я получаю 6 не потому, что я взялъ нѣкоторое число два раза, а потому, что я получаю число, меньше семи на одну единицу, а такое число есть шесть. — Вторая часть разсужденія тоже не логична: „но число, которое я взялъ два раза, есть три“, — говорить Грубе. А откуда извѣстно, что оно есть три? Что $6=2 \times 3$, вѣрно; но изъ этой формулы, безъ допущенія дѣйствія дѣленія, слѣдуетъ только то, что 6 есть дважды 3, но еще не слѣдуетъ, что только три есть то число, которое мы должны удвоить, чтобы получить 6. Такое разсужденіе совершенно не точно, не гарантируя среднѣшняго отвѣта. Подобныя разсужденія не только въ математикѣ вообще, но даже и въ высшей ея отрасли, въ ея, такъ сказать, преддверіи, въ арифметикѣ, допускаемы быть не могутъ.

„На сколько единиц 7 больше числа, вдвое большего 2-хъ?
 „Число вдвое большее 2-хъ есть 4. 7 больше 4-хъ на 3, за-
 ключается въ себя, стало быть, на 3 единицы больше 4-хъ. Итакъ,
 7 больше удвоенныхъ 2 хъ на 3×1 *)).

„И. Въ негльѣ 7 дней. Первый, второй, ... седьмой день назы-
 ваются? Между третьимъ и пятымъ днемъ сколько дней? и т. д. **).
 Я однажды совершилъ путешествіе, которое длилось недѣлю. Сколь-
 ко дней я былъ въ дорогѣ? Сколько денегъ я израсходовалъ, если
 каждый день расходовалъ по талеру? Если ты ежедневно будешь
 класть въ копилку по одному шфенигу, сколько получится денегъ
 за цѣлую недѣлю? Сколько такимъ образомъ собралось бы двей-
 еровъ ***) (монета въ два шф.)? Сколько литровъ въ семи шоппе-
 нахъ (полштофахъ)?

$$\left. \begin{array}{l} \text{1 литръ} \\ \text{1} \quad \text{1} \quad \text{1} \quad \text{1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{3 шоппена} \\ \text{1} \quad \text{1} \quad \text{1} \end{array} \right\}$$

„Сколько шоппеновъ не хватаетъ для второго литра? Малень-
 кій Георгъ долженъ былъ принести изъ будочной два хлѣбца,
 по 5 шф. каждый, денегъ же получалъ—одну монету въ 5 шф. и
 одну въ два. Достаточно ли было денегъ? Сколько онъ принесъ
 сдачи?—Въ другой разъ его послали за пивомъ и дали ему одну
 монету въ пять зильбергрошей, другую—въ два. Сколько шоппе-
 новъ пива онъ долженъ былъ принести, если 1 шоп. стоитъ 1
 зильбергрошъ?“

Дѣло, понятно, не въ мелкихъ недосмотрахъ и ошибкахъ, на
 которые обращено вниманіе въ примѣчаніяхъ, а въ крайнемъ
 однообразіи упражненій и однообразіи изученія числа. Столь же
 тяжело и однообразно идетъ изученіе другихъ чиселъ. До 36-ти
 включительно ведется это, по меньшей мѣрѣ безплодное, изученіе
 подробно для каждаго числа въ отдѣльности. На числахъ отъ 37
 до 49 включительно Грубе уже не останавливается, переходя прямо
 къ 50-ти, каковому числу посвящается больше страницы. Потомъ
 идетъ число 60 и, наконецъ, число 100, которому посвящено боль-
 ше трехъ страницъ схемъ, „задачъ“ и упражненій.

Съ цѣлыми методическими указаніями, даваемыми Грубе,
 мы ознакомились выше; чтобы усилить себѣ вполне методу Грубе,
 должно ознакомиться съ его методическими указаніями относи-
 тельно обученія счету на тѣхъ ступеняхъ курса, которые посвя-
 щаются числамъ отъ 10 до 100: 1) наглядными пособиями остаются

*) Э о не ясно.

**) Въ „задачахъ“ такого рода, кажется, есть моменты, могущіе въ-
 сколько сбить съ толку учащагося. Задачи на время должны быть зада-
 ваемы съ должною осторожностью и при томъ не на первыхъ ступеняхъ
 обученія.

***) Ни одного, — отвѣтить неглупый и незаблудный ученикъ, и его
 отвѣтъ будетъ вѣрнѣе того, котораго добивается Грубе.

и здѣсь пальцы и черточки; 2) изученіе различныхъ ступеней ведется *совершенно такъ же*, какъ и изученіе предыдущихъ ступеней; и 3) способы выраженія задачъ и упражненій должны разнообразить для того, чтобы учащіеся мало-по-малу освобождались отъ схемъ.— Не для чего говорить, что эти указанія не прибавляютъ ничего существеннаго къ тому, что мы знаемъ изъ предыдущаго о методѣ Грубе; но они все-таки интересны въ томъ отношеніи, что Грубе стоитъ за наглядныя пособія, но прибѣгаетъ къ нимъ не въ тѣхъ случаяхъ и пользуется ими не такимъ образомъ, какъ это дѣлаютъ нѣкоторые русскіе грубисты. Наибольшую же для насъ важность имѣетъ указаніе (стр. 44), что *не должно переходить отъ одной ступени къ другой, не исчерпавъ вполне предыдущей ступени*. Это указаніе сразу характеризуетъ все послѣдствіе пристрастія Грубе къ изученію чиселъ.— На пристрастіи къ черточкамъ и точкамъ не будемъ останавливаться; оно было бы только странно, если бы, къ сожалѣнію, не находило въ средѣ нашихъ педагоговъ иногда слишкомъ ревностныхъ подрывателей.

Теперь спрашивается: что же, собственно, можетъ быть приобрѣтено по предмету ариѳметики-искусства по усвоеніи дѣтьми перваго курса, если держаться методы Грубе? По предмету научной ариѳметики, смѣло можно сказать, такимъ путемъ ничего не можетъ быть приобрѣтено: этого не возможно отрпцать если онъ подъ таковою разумѣетъ курсъ хотя бы, напр., въ объемѣ курса Серре или Бертрапа. Но не менѣе вѣрно и то, что и *по ариѳметикѣ начальной* съ помощью этой методы тоже ничего приобрѣтено быть не можетъ, потому что ариѳметика, какъ искусство вычисленія, одной своей стороною, а именно со стороны логической, т. е. наиболѣе существенною стороною все-таки тѣсно примыкаетъ къ ариѳметикѣ-наукѣ, а между тѣмъ эта-то именно сторона совершенно игнорируется Грубе. Съ помощью методы Грубе достигается лишь то, чего человѣкъ съ мало-мальски нормальными способностями всегда можетъ достигнуть, почти безъ всякой помощи школы или учителя,—а именно: съ помощью этой методы можетъ быть (максимумъ) достигнуто умѣніе кое-какъ считать и вычислять въ предѣлахъ первой сотни. Это въ особенности справедливо относительно 1-го курса.

Не больше и результаты, достигаемые прохожденіемъ втораго курса. Сначала проходятся вычисленія надъ числами *въ предѣлахъ до тысячи*. Эта часть курса у Грубе распадается на шесть ступеней: первая—„измѣреніе“ чиселъ единицами, десятками и сотнями, вторая—простыя сотни, „измѣряемыя“ сотнями, третья—„измѣреніе“ трехзначныхъ чиселъ трехзначными же, четвертая—„измѣреніе“ сотенъ десяткомъ, пятая—„всестороннее (!) измѣреніе“ чиселъ ихъ производителями и, наконецъ, шестая—разложенія чиселъ отъ 1 до 1000 на „элементы“ (въ томъ числѣ нѣко-

торыхъ на множителѣ). Останавливаться на каждой ступени второго курса было бы тратой времени; достаточно замѣтить, что только на пятой ступени становится возможнымъ разрѣшить задачу: какова разница между 20-ою и 30-ою долей 60-ти, или задачу: на сколько единицъ сумма 326 и 418 больше суммы половины этихъ чиселъ?

Вотъ методическія указанія относительно этой части 2-го курса: 1) цѣль обученія въ теченіе 1-го полугодія (3-го или 4-го года обученія)—умѣніе разлагать числа, не превышающія тысячи, на составные элементы; 2) учащійся долженъ при этомъ „открыть секретъ“ быстрого умственного вычисленія, состоящій въ оперированіи надъ возможно малыми числами; (понятно, что слишкомъ долго приходится ждать открытій этого секрета); 3) но при этомъ, „для того чтобы привести къ всестороннему (!) представленію чиселъ (!), не можетъ быть и речи о четырехъ дѣйствіяхъ; эти послѣдніе (вмѣстѣ съ упражненіями въ быстромъ вычисленіи) появляются только во второе полугодіе 3-го или 4-го года обученія“ *); 4) въ необходимости отдѣльнаго изученія каждаго числа уже нѣтъ болѣе надобности.—Всѣ эти указанія доказываютъ, до чего можетъ быть извращено содержаніе занимающаго насъ предмета обученія, если излагать его съ точки зрѣнія методы Грубе. Такъ называемое у Грубе „всестороннее представленіе“ числа, если бы оно даже и было достижимо, необходимо должно было бы основываться на *дѣйствіяхъ* надъ числомъ; Грубе же именно дѣйствія-то и отрицаетъ вплоть до наступленія второго полугодія 3-го или 4-го года обученія. Далѣе, если бы это „всестороннее представленіе“ числа хоть заслуживало того, чтобы къ нему стремились (вѣдь стремится же человѣкъ иногда и къ недостижимому!), а то и этого сказать нельзя, ибо самое стремленіе къ всестороннему представленію числа неразумно, вслѣдствіе ничтожности услугъ, сказываемыхъ имъ ариѳметикѣ. Развивательное значеніе изученія чиселъ, конечно, тоже ничтожно. Многіе ищутъ оправданія этой методы именно въ этомъ направленіи. Они думаютъ, что самые приемы изученія приучаютъ дѣтей къ толковому слѣдованію разна-всегда опредѣленной системѣ, разна-всегда установленному шаблону. Если бы это не выдавалось за обученіе ариѳметикѣ, противъ этого, можетъ быть, и не слѣдовало бы спорить; но, къ сожалѣнію, игрѣ въ числа придается значеніе *арифметическаго* упражненія, и съ этимъ согласиться нельзя, если только принять къ свѣдѣнію истинныя требованія ариѳметики. Смотрѣть на изученіе чиселъ какъ на упражненіе, могущее быть полезнымъ при обученіи ариѳметикѣ, столь же основательно (или вѣрнѣе сказать—столь же неосновательно), какъ смотрѣть на игру въ меледу или

*) Собственныя слова Грубе!

солитеръ, какъ на упражненіе полезное при изученіи геометріи и механики. Разница есть въ этихъ случаяхъ большая, но в та скорѣ въ пользу игры въ меду и солитеръ: эти игры, по крайней мѣрѣ, интересны.—По методу Грубе, только въ курсѣ второго полугодія 3-го или 4-го года обученія появляются уже дѣйствія: А) вычисленія надъ овлеченными В) вычисленія надъ числами именованными. Отмѣчать здѣсь, собственно говоря, нечего. Совершенно обыденное, избитое, такъ сказать, казенное, бездушное изученіе дѣйствій разнообразится тамъ и сямъ мелкими логическими ошибками, которыя, впрочемъ нѣсколько не зависятъ отъ сущности метода Грубе; останавливаться на нихъ, поэтому, не для чего.

Третій курсъ рассчитанъ всего на одинъ годъ. Для перваго полугодія полагается опять-таки всестороннее разсмотрѣніе дроби (*allseitige Anschauung des Bruches*), а для втораго—дѣйствія надъ дробями. Методическія указанія опускаемъ, въ виду совершенно мнимой, призрачной систематичности этого курса. Первая половина этого курса распадается на шесть ступеней, в это разложеніе на „ступени“ сдѣлано на 17-ти страницахъ: здѣсь и линейки, и скобочки, и кругъ, и квадратикъ, и проч., и проч. Эта часть курса очень слаба и по мысли, и по исполненію; но для насъ она не особенно интересна.

Заключивается сочиненіе Грубе слѣдующими словами: „Разъ учитель до сихъ поръ добросовѣстно слѣдилъ за нашимъ изложеніемъ, онъ можетъ взять какой-либо задачникъ *), конечно, методически толковый задачникъ,—и его ученики быстро и толково разрѣшаютъ всѣ задачи отъ начала до конца. Такъ какъ, по нашему мнѣнію, самъ учитель долженъ быть вполнѣ самостоятеленъ, то онъ и не нуждается ни въ какихъ длинныхъ и объемистыхъ теоретическихъ указаніяхъ и руководствахъ. Впрочемъ, учитель не долженъ думать, что слѣдуетъ продѣлать рѣшительно всѣ задачи. Въ тѣхъ случаяхъ, когда можно пользоваться нагляднымъ наблюденіемъ, итъ нужды, даже для приобрѣтенія навыковъ, въ слишкомъ большомъ количествѣ примѣровъ. Не многое, но основательно (*nicht vielerlei, sondern viel*)“.

Хотя иные, дѣйствительно почтенные люди, напр., Дистервергъ, и относятся съ нѣкоторымъ уваженіемъ къ методу Грубе, но никто изъ этихъ же педагоговъ не сталъ бы проповѣдывать неподвижность въ дѣлѣ обученія, такъ что въ указаніи недостатковъ этой метода, конечно, невозможно пойти что-либо предосудительное. Не только циничій эти строки, но и многіе другіе, при всемъ своемъ уваженіи къ Дистервергу, не могутъ согласиться съ тѣмъ, чтобы метода Грубе была въ состояніи выдержать хотя бы свисходительную критику, если смотрѣть на дѣло съ точки зрѣніи

*) Въ примѣчаніи похвалены задачки Генцеля, Беме, Адама и Менцеля.

здравых педагогическихъ требованій. Прежде и прежде всего эта метода, — ужь не говоримъ о принципахъ арифметики-науки, — извращаетъ самыя простыя ученія арифметики, какъ искусства вычисленія, до неузнаваемости и вполне противорѣчатъ основнымъ ученіямъ педагогической психологіи.

„Что такое метода Грубе? спрашиваетъ Книллингъ. Какую пользу она принесла? — Въ положительномъ смыслѣ никакой, а въ отрицательномъ она была полезна только тѣмъ, что довела песталоццѣвскій принципъ наглядности до крайностей, вслѣдствіе чего ясное проявилась его нецѣлесообразность въ дѣлѣ обученія арифметикѣ. Я вовсе не намѣренъ отрицать въ современной методѣ какую бы то ни было цѣнность. Я даже признаю, что она была необходимою ступеню развитія обученія арифметикѣ и что если намъ удастся достиги до болѣе правильныхъ взглядовъ и болѣе практичныхъ принциповъ, то мы обязаны этимъ частью методѣ Грубе. Ибо заблужденіе должно пройти дѣлшій рядъ фазисовъ, прежде чѣмъ оно будетъ признано таковымъ, и поэтому, кто выводитъ изъ даннаго невѣрнаго принципа его крайнія послѣдствія, тотъ невольно способствуетъ раскрытію истины: онъ такимъ образомъ открываетъ намъ глаза; онъ, самъ того не желая, раскрываетъ скрытые недостатки и одностороннія ошибки мнимой истины, которой онъ служитъ; онъ своимъ примѣромъ свидѣтельствуетъ — къ чему она въ состояніи привести, какія нецѣлности (Ungeheimtheiten) и безобразія (Ungehuerlichkeiten) кроются въ ея основаніи, и такимъ образомъ облегчаетъ намъ возможность узрѣти заблужденіе и отыскать все то, что дѣйствительно истинно, разумно, практично. Не что иное, какъ именно чудовищность (die Wunderlichkeit, die Bizarterie) всесторонняго изученія чиселъ, продолжаетъ Книллингъ, было побужденіемъ къ предлагаемымъ методико-арифметическимъ изслѣдованіямъ моихъ. Моя книга не была бы написана, если бы ей не предшествовало „Руководство“ Грубе. Оригинальный образъ мыслей этого глубокомысленнаго (sic) автора меня несравненно болѣе принуждалъ къ этимъ изслѣдованіямъ, чѣмъ менѣе ошибочныя (благодаря только нѣкоторой счастливой послѣдовательности), но зато и болѣе практичныя сочиненія Дистервега, Рейзера, Генцеля и др.“ (стр. 146 и 147).

Изъ русскихъ составителей курсовъ по предмету методики арифметики и различнаго рода учебныхъ пособій по арифметикѣ за Грубе послѣдовали гг. Паульсонъ, Волненъ, Евзушевскій, Иселятевъ и нѣкоторые другіе.

§ 7. На такъ называемое изученіе чиселъ можно смотрѣть только съ трехъ точекъ зрѣнія: 1) либо какъ на дѣль всего курса арифметики, 2) либо какъ на средство сдѣлать содержаніе арифметики доступнымъ малолѣтнему учащемуся, и 3) либо какъ на побочное, неимѣющее ничего общаго съ арифметикою, но тѣмъ

не менѣе нужное для умственного развитія упражненіе. Другія точки зрѣнія, кажется, немислимы.

1) Первая точка зрѣнія неосновательна, ибо содержаніе ариометикн составляютъ, какъ мы видѣли, *дѣйствія* надъ числами. Ариометика безъ дѣйствій,—безъ дѣйствій, какъ таковыхъ,—такъ же невозможна, какъ химія безъ явленія химическаго *взаимодѣйствія* тѣмъ другъ на друга, какъ механика безъ *явленій* движенія, какъ грамматика безъ изученія *формъ* языка и ихъ *измѣненій*, какъ исторія безъ прагматическаго изложенія историческихъ *событій*, какъ наука о жизни (біологія), основанная только на изученіи труновъ. Ариометика, какъ наука, есть наука не о числахъ, а о *дѣйствіяхъ* надъ числами; ариометика, какъ искусство вычисленія, поэтому излагаетъ и должна излагать правила и способы производства *дѣйствій*. Число въ ариометикѣ, понимаемой какъ въ смыслѣ науки, такъ и въ смыслѣ искусства вычисленія, есть только объектъ, надъ которымъ совершается дѣйствіе, а потому ею изучается и должно изучаться не самое число, а только дѣйствіе надъ числомъ и способъ его производства. Всѣ свойства чиселъ какъ въ томъ смыслѣ, который придается имъ высшею математикою, такъ и въ томъ, который имъ придается грубенстами различнаго рода—всѣ свойства чиселъ, повторяемъ, достигаются только при помощи дѣйствій надъ ними. Цѣлью обученія ариометикѣ можетъ быть, такимъ образомъ, только изученіе ариометическихъ дѣйствій, если на время отвѣчаться отъ формальныхъ цѣлей, преслѣдуемыхъ всякимъ учебнымъ предметомъ общеобразовательной школы. Если бы изученіе чиселъ даже и не было забавою грубенстовъ и бесполезнымъ мученіемъ дѣтей, еслибы оно приносило пользу хотя бы въ одномъ какомъ-либо отношеніи, то и тогда нельзя было бы считать его *целью* обученія ариометикѣ, которая при этомъ изученіи была бы не причемъ. Принимать изученіе чиселъ за цѣль обученія ариометикѣ въ этомъ случаѣ было бы такъ же странно, какъ странно было бы принимать изученіе различныхъ типографскихъ шрифтовъ и ихъ особенностей за цѣль обученія грамотѣ. Но считать изученіе чиселъ *целью* преподаванія ариометикн невозможно еще и потому, что самое-то изученіе, безъ всякаго отношенія къ учебному и воспитательному значенію *ариметикн*, не целесообразно въ случаѣ, если оно *слѣдуетъ* за изученіемъ дѣйствій, и въ еще большей степени — въ томъ случаѣ, если оно *предшествуетъ* дѣйствіямъ; ибо въ первомъ случаѣ оно неразумно по своей безцѣльности (такъ какъ ничего не даетъ такого, чего нельзя было бы достигнуть съ помощью дѣйствій), а во второмъ—по своей неосновательности (такъ какъ оно не можетъ быть, какъ слѣдуетъ, проработано безъ помощи понятій о дѣйствіяхъ и безъ помощи самихъ дѣйствій надъ числами).

2) Не можетъ ли, въ такомъ случаѣ изученіе чиселъ разсматриваться лишь какъ средство при обученіи арифметикѣ, лишь какъ вспомогательное средство, которое можетъ и должно быть оставлено къ тому времени, когда его услуги болѣе не нужны? Какъ средство, изученіе чиселъ можетъ быть, въ свою очередь, разсматриваемо съ трехъ точекъ зрѣнія: а) или съ точки зрѣнія чисто-психологической, б) или съ точки зрѣнія общепедагогической, или же, наконецъ, в) съ точки зрѣнія специально-арифметической.

а) Съ точки зрѣнія чисто-психологической необходимость и польза изученія чиселъ доказываютъ все грубености. Къ несчастію, та психологія, на которую они при этомъ ссылаются, на каждомъ шагѣ противорѣчитъ основамъ действительно-научной психологіи. Г. Паульсонъ, напр., вмѣстѣ съ цитируемымъ имъ Грубе, настаиваютъ на томъ, „чтобы каждое число первыхъ двухъ разрядовъ, со всеми свойствами и отношеніями своими, ясно представлялось воображенію ученика“ („Ар. по Грубе“, стр. 9), забывая при этомъ, что такое требованіе рѣшительно неисполнимо. Они думаютъ, что учащемуся доступно число, чѣмъ дѣйствіе падеъ имъ, въ то время какъ на самомъ дѣлѣ именно числа-то и недоступны нашему воображенію, тогда какъ дѣйствія падеъ ими — вполне доступны. Они видятъ во всестороннемъ разсмотрѣніи числа средство къ *ясности* представленія объ этомъ числѣ, въ то время какъ ясность представленія этомъ въ случаѣ, напротивъ, становится призрачною. Дѣйствительно, подумайте—когда представленіе о любомъ числѣ (напр., о 37) ясное: тогда-ли, когда мы его разсматриваемъ съ точки зрѣнія нумерации, т. е. разсматриваемъ его такъ, какъ его разсматривать надлежитъ, или же тогда, когда мы его разсматриваемъ такимъ образомъ:

$$36 + 1 = 30 + 7, 31 - 6, 32 - 5, \text{ и т. д. и т. д.,}$$

не имѣя еще точнаго понятія о логическомъ смыслѣ сложенія? Очевидно, что именно ясность-то представленія о числѣ и исчезаетъ, какъ только мы приступаемъ къ изученію его, ибо ясность представленія о данномъ предметѣ вовсе не тождественна съ изобиліемъ разнообразныхъ о немъ свѣдѣній. Словомъ, если смотрѣть на изученіе чиселъ съ психологической точки зрѣнія, то оно оказывается тоже не рациональнымъ.

б) Съ точки зрѣнія общепедагогической, формальной, изученіе чиселъ оказывается тоже въ высшей степени сомнительнымъ средствомъ для обученія арифметикѣ. Г. Паульсонъ вмѣстѣ съ Грубе говорятъ, что преподаваніе арифметики по этой методѣ дѣйствуетъ на учениковъ „равнодушно“, возбуждая ихъ самостоятельность и внушая имъ любовь къ ученію, что оно развиваетъ ихъ способности. „знакомитъ съ сущностью (!) науки (?)“ и сообщаетъ не-

обходимыя въ жизни практическія знанія. На самомъ же дѣлѣ эта метода (метода изученія чиселъ) не обладаетъ, по очень многимъ причинамъ, ни однимъ изъ этихъ достоинствъ. Она крайне однообразна и утомительна и поэтому не можетъ дѣйствовать на учащагося сколько-нибудь развивающимъ образомъ, а тѣмъ болѣе развивать его въ „правственномъ“ отношеніи. Она требуетъ отъ учителя такой массы наводящихъ вопросовъ и вполне искусственныхъ пріемовъ, что на долю именно самодѣятельности-то учащихся остается очень мало интересной и полезной въ какомъ бы то ни было смыслѣ работы. Такимъ образомъ, вовсе не справедливо, что эта метода возбуждаетъ любовь къ ученію и труду вообще. Внушить любовь къ ученію и труду вообще, можетъ быть, и удастся инымъ учителямъ и учительницамъ, учащимъ по этой методѣ, но это имъ удастся скорѣе вопреки методѣ, нежели благодаря ей; ибо, въ дѣлѣ развитія въ учащихся любви къ ученію и труду вообще, при обученіи не менѣе важную роль, чѣмъ метода, а можетъ-быть и гораздо болѣе важную роль, играетъ нравственная личность учителя. Сомнительно также и благотворное вліяніе этой метода на умственные способности учащихся. Она въ состояніи скорѣе извратить пріемы мышленія учащихся, нежели правильно и дѣлсообразно „развить“ ихъ, такъ какъ въ самой ея основѣ лежитъ фальшивая и противорѣчающая здравому смыслу идея. Остальныя же два притязанія, заявляемая этой методой, а именно возможность при ея помощи ознакомленія „съ сущностью науки“ и сообщенія учащимся необходимыхъ въ жизни практическихъ знаній, можно сказать, столь же неосновательны. Съ сущностью науки метода эта не имѣетъ и не можетъ имѣть ничего общаго. Хотя арифметика, какъ наука, и не заключаетъ въ себѣ ничего особенно мудренаго, но все-таки въ ней (какъ мы это видѣли выше) такъ много серьезныхъ математическихъ понятій и ученій, что не только метода Грube, но и вообще никакая, хотя бы и волиѣ рaціональная, метода первоначальнаго обученія малолѣтнихъ арифметикѣ съ этой наукой познакомить дѣтей не въ состояніи. Что касается необходимыхъ въ жизни „практическихъ знаній“, то метода эта не только ихъ не даетъ, но и дать не въ состояніи: необходимыя въ жизни практическія знанія по арифметикѣ сводятся, главнымъ образомъ, къ умѣнію толково, дѣльно и быстро производить вычисленія, а именно такого-то умѣнія изученіе чиселъ дать не въ состояніи — вслѣдствіе того, что оно вовсе не „беретъ быка за рога“, т. е. вовсе не приступаетъ къ дѣлу кратчайшимъ и вѣрнѣйшимъ путемъ, и вслѣдствіе того, что изученіе чиселъ требуетъ громадной затраты времени.

в) Съ точки зрѣнія специально арифметической, всестороннее изученіе чиселъ — вообще и въ частности не можетъ быть раз-

считается какъ средство къ дальнѣйшему обученію ариметикѣ. При прохожденіи того или другого дѣйствія иногда, въ видѣ упражненія, можетъ быть предложена ученику задача, какъ будто и напоминающая изученіе числа въ томъ или другомъ отношеніи. Такъ напр., при изученіи дѣйствія кратнаго сравненія можно задать въ видѣ упражненія задачу на разложеніе числа на равныя слагаемыя. Но это будетъ, во-первыхъ, не изученіе каждаго даннаго числа въ отдѣльности, а во-вторыхъ, изученіе въ этомъ случаѣ не будетъ средствомъ къ обученію ариметикѣ *вообще*. Это изученіе не можетъ быть полезнымъ въ роли универсальнаго *средства* въ дѣлѣ первоначальнаго обученія арифметикѣ по той же причинѣ, по которой оно не можетъ быть *цѣлью* обученія арифметикѣ, а именно по причинѣ невѣрности его съ чисто-арифметической, нефилософскою съ педагогической и неосновательности съ психологической точки зрѣнія. Какъ это, надѣмся, уже разъяснено выше, не число, а дѣйствіе надъ нимъ интересуетъ арифметику, и не число, всесторонне изученное, для нея важно, а дѣйствіе надъ числомъ, разсматриваемое только съ двухъ точекъ зрѣнія, а именно: 1) съ точки зрѣнія логическаго его смысла и цѣли, и 2) съ точки зрѣнія его производства въ связи съ нумераціею.

3) Остается подробно разсмотрѣть еще значеніе изученія чиселъ, какъ упражненія хотя и не преслѣдующаго цѣли обученія арифметикѣ, но все-таки признаваемаго нѣкоторыми полезнымъ въ развивательномъ отношеніи.—Подобныхъ заблужденій въ исторіи педагогики не мало: очень часто специфической дрессировкѣ дѣтей въ какомъ нибудь совершенно спеціальному, крайне одностороннему направленіи педагоги склонны приписывать ни въѣсть какое общее, педагогическое значеніе. Достаточно вспомнить о крайностяхъ объяснительнаго чтенія, предметныхъ уроковъ, и нѣкоторыхъ другихъ педагогическихъ изобрѣтеній, чаще всего даже и въ основѣ своей довольно ошибочныхъ, чтобы убѣдиться въ томъ, что совершенно чуждымъ истинной цѣли образованія упражненіямъ иногда придается громадное, несообразное настоящей цѣльности ихъ, значеніе. Пріученіе дѣтей къ шаблонамъ изученія чиселъ принадлежитъ къ числу заблужденій того же рода: это — игра, отнимающая массу драгоцѣннаго времени, и въ этой игрѣ, можетъ быть, столько же, а скорѣе гораздо менѣе развивательныхъ моментовъ, чѣмъ сколько ихъ во всякой другой арифметической игрѣ. Относительно изученія чиселъ какъ игры, впрочемъ, особенно спорить не слѣдуетъ; но что эта игра не можетъ считаться обученіемъ арифметикѣ—въ томъ, надѣмся, читатель, убѣдился, если удостоитъ вышесказанное своего вниманія.

Гр. *Л. Н. Толстой*, въ одной изъ своихъ педагогическихъ статей, по поводу обученія грамотѣ совершенно справедливо за-

мѣчаютъ: „Для того, чтобы заимствовать приемы европейскихъ школъ, мы обязаны отличать то, что въ нихъ основапо на вѣчныхъ законахъ разума, отъ того, что родилось только въслѣдствіе историческихъ условій“. („Сочиненія гр. Толстого“, изд. V-ое, часть IV, стр. 27). Насколько вѣрны выводы, дѣлаемые гр. Толстымъ изъ этого положенія въ отношеніи къ обученію грамотѣ — не мѣсто здѣсь разбирать. Но вообще справедливость этого положенія невозможно не признать во всякомъ случаѣ. Весь вопросъ можетъ быть только о томъ — что считать вытекающимъ изъ „вѣчныхъ законовъ разума“ и что — вытекающимъ изъ историческихъ условій. Смѣемъ надѣяться, что выше читатель найдетъ достаточно основаній для того, чтобы признать такъ называемое „изученіе чиселъ“ однимъ изъ тѣхъ приемовъ, которые возникли въ Германіи вовсе не въ силу „вѣчныхъ законовъ разума“, а вѣроятно въслѣдствіе спеціальныхъ историческихъ условій, для русской школы нисколько не обязательныхъ *).

Въ заключеніе этого параграфа позволимъ себѣ привести мнѣніе Руд. Книллинга о методѣ изученія чиселъ, лежащей въ основѣ очень многихъ сочиненій по предмету методикъ начальной ариометики и очень многихъ учебныхъ пособій (въ томъ числѣ, напр., извѣстнаго собранія задачъ г. Евтушевскаго):

1) Трудъ, потраченный на то, чтобы привести дѣтей къ яснымъ представленіямъ о числахъ, напрасенъ. 2) Разложеніе чиселъ на составные элементы есть игра, умерщвляющая духъ (eine geisttödtende Spielerei). 3) Разнообразіе дѣйствій при такъ называемомъ всестороннемъ разсматриваніи числа сбиваетъ начинающаго съ толку и создаетъ путаницу, неурадицу въ его мышленія. 4) Концентрація обученія при этомъ его методѣ невозможна. 5) Всестороннее изученіе каждаго числа первой сотни скучно, утомительно, безрезультатно и неосповательно ни съ психологической, ни съ ариометической точки зрѣнія (langweilig, ermüdend, resultatlos, und weder psychologisch gerechtfertigt, noch auch durch das Object begründet). 6) Метода Грубе требуетъ слишкомъ большой потери времени отъ школы, требуетъ слишкомъ большого

* Ср. упоминаемую выше „Методику ариометики“, составленную авторомъ этихъ строкъ. — Мы не стали бы такъ долго останавливаться на методѣ изученія чиселъ, если бы мы не разчитывали, что наша книга попадетъ въ руки нѣкоторыхъ учителей городскихъ школъ, учителей приговорительныхъ классовъ мужскихъ учебныхъ заведеній, учительницъ женскихъ учебныхъ заведеній и другихъ лицъ безъ высшаго математическаго образованія: въ средѣ этихъ лицъ не мало, вѣроятно, сторонниковъ той или другой формы метода изученія чиселъ. Если кто нибудь изъ этихъ лицъ не убѣдился вышеизложенными соображеніями относительно метода изученія чиселъ, то мы того позволяемъ себѣ отослать къ упомянутому выше сочиненію нашему, изъ котораго частью извлечено вышеизложенное, но въ которомъ эти соображенія положены гораздо полнѣе и подробнѣе.

искусства и терпѣнія отъ учителя и слишкомъ большихъ усилій отъ учениковъ, не давая взамѣнъ всего этого необходимаго дѣтямъ знаній ариметики.

§ 8. Прохождение съ дѣтьми курса начальной ариметики по учебнику, какъ мы видѣли выше, дискредитовано въ школьной практикѣ очень давно. Къ болѣе или менѣе самостоятельному чтенію учебника учащійся можетъ приступить только на высшихъ ступеняхъ обученія, никакъ не ранѣе второго, третьяго класса ср. уч. заведенія. О роли учебника при обученіи мы будемъ говорить ниже; здѣсь же достаточно только констатировать необходимость при классномъ и домашнемъ *первоначальномъ* обученіи обратиться къ какимъ либо другимъ средствамъ. Излагательная (акроаматическая) форма обученія при первоначальномъ обученіи ариметикѣ, какъ это само собою разумеется, тоже неумѣстна и нецѣлесообразна: вниманіе и способность слѣдить за логикой излагаемаго въ малолѣтнемъ учащемся развиты въ слишкомъ ничтожной степени. На что же, въ такомъ случаѣ, можетъ опираться обученіе ариметикѣ? Обученіе ариметикѣ должно опираться на задачи и цѣлесообразное употребленіе наглядныхъ пособій; что же касается формы обученія, то она должна быть, хотя и не преимущественно, катехитической. Прежде всего обратимся къ вопросу о задачахъ и ихъ роли при обученіи ариметикѣ.

Задачи, извѣстныя подъ именемъ арифметическихъ, несмотря на все свое разнообразіе, могутъ быть точно распределены на два класса: 1) задачи чисто-арифметическія и 2) задачи алгебраическія. Всякая задача, для рѣшенія которой требуется примѣненіе только прямыхъ дѣйствій, можетъ быть названа *чисто-арифметическою*; задача же, для рѣшенія которой требуется примѣненіе хотя бы только одного изъ обратныхъ дѣйствій можетъ быть названа *алгебраическою*. Эти термины избраны по слѣдующимъ соображеніямъ: если при рѣшеніи задачи требуются только прямыя дѣйствія, то искомое, неизвѣстное число представляетъ собою, по составленіи уравненія, нѣкоторую явную функцію данныхъ чиселъ; при этомъ аналитическій способъ составленія уравненія для рѣшенія подобной задачи оказывается совершенно бесполезнымъ. Далекое не то же можно сказать о задачахъ, для рѣшенія которыхъ требуется какое либо обратное дѣйствіе, какъ бы проста ни была данная задача этого рода: въ этихъ задачахъ неизвѣстное число является связаннымъ съ извѣстными такимъ образомъ, что ее должно считать, съ алгебраической точки зрѣнія, неявною функціею данныхъ чиселъ; обращеніе послѣдней въ функцію явную является цѣлью рѣшенія полученнаго уравненія, либо же цѣлью особаго ряда разсужденій, если уравненіе не составлено.

Для того чтобы уяснить себѣ разницу между чисто-арметическими и алгебраическими задачами, займемся разрѣшеніемъ двухъ задачъ. при чемъ, прибѣгая къ обозначенію некоего числа какою либо буквою (напр., буквою x), составимъ уравненіе.

Задачи пусть будутъ слѣдующія:

1) Торговецъ разсчиталъ, что если онъ весь остатокъ своего ситца станеть продавать по 8 ми коп. за аршинъ, то онъ понесетъ при этомъ убытку 92 р.; если бы онъ сталъ продавать его по 10-ти коп., то онъ получилъ бы 28 руб. прибыли. Сколько у него оставалось ситца?

2) Нѣкто купилъ 7 аршинъ сукна по 3 руб. за аршинъ и 5 аршинъ бархата по 7 р. за аршинъ; послѣ этого у него осталось столько денегъ, что на нихъ онъ могъ бы купить еще два аршина сукна по 4 р. и три аршина бархата по 6 р. за арш. Спрашивается — сколько у него было денегъ до покупки?

Первая изъ этихъ задачъ разрѣшается съ помощью уравненія слѣдующимъ образомъ: Пусть все число аршинъ ситца, оставшагося у торговца, равно x . Продавъ весь ситець по 8 коп. за аршинъ, онъ, по условію задачи, всего выручилъ бы $8 \times x$ копеекъ и при этомъ понесъ бы 92 рубля убытка; стало быть, весь ситець стоилъ ему самому

$$8 \times x + 9200$$

коп. Продавъ же весь ситець по 10 коп. за аршинъ, торговецъ, согласно другому условію задачи, выручилъ бы $10 \times x$ копеекъ и при этомъ получилъ бы 28 руб. прибыли; стало быть, весь ситець ему самому стоилъ

$$10 \times x - 2800$$

коп. Мы получили два выраженія:

$$8 \times x + 9200 \text{ и } 10 \times x - 2800,$$

которыя оба въ различной формѣ выражаютъ одну и ту же величину — стоимость всего оставшагося у торговца ситца. Поэтому можемъ утверждать, что если буква x обозначаетъ количество аршинъ нѣбющагося у торговца ситца, то

$$8 \times x + 9200 = 10 \times x - 2800$$

Это выраженіе и представляетъ собою нѣкоторое *уравненіе*, на основаніи котораго можно различными способами вычислить величину числа x , т. е. количество аршинъ оставшагося у торговца ситца.

Перейдемъ ко второй задачѣ. Пусть количество рублей, бывшихъ у даннаго лица до покупки, было x . Изъ этихъ денегъ

онъ изтратилъ 3 р. \times 7 на сукно и 7 р. \times 5 — на бархатъ. Послѣ этого у него осталось

$$x = (3 \times 7 + 7 \times 5)$$

рублей. По другому условію, онъ на оставшіяся деньги могъ бы купить 2 арш. сукна по 4 р. и 3 арш. бархата по 6 р. за аршинъ; это значить, что у него осталось

$$4 \times 2 + 6 \times 3$$

рублей. Такимъ образомъ и здѣсь получаемъ одну и ту же величину, выраженную различнымъ образомъ, результатомъ чего является уравненіе:

$$x = (3 \times 7 + 7 \times 5) = 4 \times 2 + 6 \times 3. *)$$

Важно для насъ главнымъ образомъ то, что: 1) существуютъ такія задачи, на рѣшеніе которыхъ введеніе алгебраическаго обозначенія неизвѣстной величины нисколько не вліяетъ; 2) при рѣшеніи подобныхъ задачъ надъ введенною неизвѣстною величиною не производится никакихъ дѣйствій; 3) алгебраическій способъ не приводитъ при своемъ приложеніи къ этому роду задачъ ни къ чему существенному; 4) существующія задачи, на рѣшеніе которыхъ введеніе алгебраическихъ методовъ рѣшенія (т. е. составленіе уравненій) оказываетъ болѣе или менѣе большое вліяніе.

Сообразно съ этою точкою зрѣнія задача, требующая простаго вычитанія или дѣленія, есть задача алгебраическая: ибо какъ бы она проста ни была, она приводитъ къ уравненію.

$$x - a = b$$

или къ уравненію

$$x = a + b,$$

въ которомъ x подлежатъ опредѣленію. Но для краткости можно условиться задачи, для рѣшенія которыхъ требуется одно дѣйствіе, будь то дѣйствіе прямое или обратное, называть тоже арифметическими; алгебраическими же условіями называть всѣ тѣ

*) Эта послѣдняя задача настолько проста, что пишущій эти строки въ другомъ своемъ сочиненіи для краткости считаетъ ее задачею чисто-арифметическою и даже приводитъ ее какъ примѣръ задачи чисто-арифметической. Очень сожалѣю о столь неудачномъ выборѣ примѣра, мы считаемъ долгомъ своимъ заявить, что сказанная логическая ошибка указана намъ М. С. Григнбергомъ, учителемъ математики при Могилевской гимназій, въ письмѣ его и что на изложенную здѣсь классификацію задачъ на чисто-арифметическія и алгебраическія мы были наведены частью также и пѣвными для насъ замѣчаніями именно этого письма. Мы однако позволяемъ себѣ замѣтить, что классификація, изложенная въ нашей „Методицѣ арифметики“ (М. 1886), для цѣлей тамъ намѣченныхъ, достаточно точна.

задачи, которыя подъ этимъ именемъ упоминаются въ выше данной классификации, за исключениемъ задачъ, требующихъ только вычитанія или только дѣленія.

Чисто-арифметическія задачи можно различать двухъ родовъ: 1) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе только одного изъ четырехъ дѣйствій, и 2) задачи, для разрѣшенія коихъ требуется приложеніе двухъ или болѣе дѣйствій. Первый классъ чисто-арифметическихъ задачъ условно можно называть *простыми*, второй — *сложными*.

Чтобы понять все значеніе задачъ простыхъ въ дѣлѣ обученія арифметикѣ, должно принять къ свѣдѣнію слѣдующія соображенія. Прежде чѣмъ учить дѣтей *производству* арифметическихъ дѣйствій, имъ должно уяснить самую необходимость дѣйствій, ихъ право на существованіе, ихъ цѣль и логическій смыслъ. Встарину учащемуся задавали примѣры на то или иное дѣйствіе и при этомъ требовали, чтобы онъ твердо зналъ правило и правильно совершилъ заданное дѣйствіе. Понимаетъ ли онъ самую цѣль дѣйствія, его логическій смыслъ, понимаетъ ли онъ самую сущность дѣйствія и право этого послѣдняго на вниманіе, этикъ не интересовались; на простые задачи тогда поэтому не обращалось должнаго вниманія. Не существенно измѣнилось дѣло и тогда, когда болѣе или менѣе безсмысленнымъ, безцѣльнымъ изученіемъ чиселъ было вытѣснено безсмысленное выучиваніе наизусть правилъ по учебнику и не болѣе осмысленное производство дѣйствій надъ заданными числами. На самомъ же дѣлѣ простые задачи лучше, чѣмъ всяческія правила и опредѣленія, лучше какого бы ни было изученія чиселъ пригодны именно для того, чтобы съ ихъ помощью: 1) привести учащагося къ мысли о необходимости дѣйствія надъ числами, 2) уяснить ему цѣль и логическій смыслъ того или другаго дѣйствія, 3) ознакомить его съ различными въ логическомъ отношеніи случаями примѣненія этого дѣйствія и 4) сдѣлать ему новыя различія въ словесномъ отношеніи способы выраженія одного и того же арифметическаго требованія.

Какъ, въ самомъ дѣлѣ, убѣдить ребенка въ томъ, что и съ логической, и съ практической точки зрѣнія, необходимо создать, придумать такое-то арифметическое дѣйствіе, строго, точно и безошибочно различая его отъ другихъ? Какъ уяснить ему цѣль и смыслъ даннаго дѣйствія, случаи его примѣненія и различными словесными выраженіями требованія, чтобы это дѣйствіе было совершено? Никакія опредѣленія, разъясненія, правила, никакое изученіе чиселъ, конечно, не въ состояніи этого сдѣлать такъ, какъ то въ состояніи сдѣлать методически подобранная группа задачъ, которыя преслѣдуютъ именно эти цѣли. Ибо опредѣленія дѣти точно такъ же, какъ и взрослые, понимаютъ только тогда,

когда все понятия, входящая в определение, имъ хорошо извѣстны, когда имъ извѣстна цѣль опредѣленія и все соприкасающіяся съ даннымъ опредѣленіемъ понятія. Что же касается изученія чиселъ, то оно только тогда приводитъ къ дѣйствию, когда эти дѣйствія извѣстны, если же идеи дѣйствій илѣтъ, то изученіе чиселъ, этой *правильной* идеи, какъ мы это видѣли выше, учащимся дасть не въ состояніи.

Результатомъ этихъ размышленій является слѣдующее основное положеніе: для развитія у учащихся правильной идеи о четырехъ дѣйствіяхъ, соотвѣствующихъ части курса начальной арифметики должны быть построены на задачахъ и притомъ на задачахъ простыхъ.

Что же касается сложныхъ чисто-арифметическихъ задачъ, то для цѣлей обученія арифметикѣ ихъ значеніе лишь постолько важно, поскольку онѣ служатъ той же цѣли развитія у учащихся правильной идеи о четырехъ дѣйствіяхъ. Для ихъ рѣшенія требуется чаще всего только большее развитіе вниманія и большее пониманіе родной рѣчи. Въ этомъ смыслѣ значеніе сложныхъ чисто арифметическихъ задачъ скорѣе преслѣдуетъ развивательныя цѣли. Дѣло въ томъ, что рациональное обученіе вообще оказываетъ полезное вліяніе на умственное развитіе учащихся, и въ этомъ смыслѣ обученіе арифметикѣ, понятію, тоже можетъ быть полезно въ смыслѣ развивательномъ. По говору о развивательномъ значеніи сложныхъ чисто-арифметическихъ задачъ, мы имѣемъ въ виду не развитіе вообще, но специально развитіе навыка къ употребленію, а главное—къ пониманію литературной математической рѣчи, рядомъ съ развитіемъ большого вниманія.

При разрѣшеніи сложныхъ чисто-арифметическихъ задачъ представляется простѣйшій случай къ усвоенію способа разложенія задачи со многими условіями на составляющія ее простыя. Какъ бы многочисленны ни были условія такой задачи, анализъ задачи этого рода не требуетъ особенной сноровки для уразумѣнія ея составныхъ элементовъ. При этомъ замѣчательно, что тѣ простыя задачи, къ разрѣшенію коихъ приводится задача сложная изъ класса чисто-арифметическихъ, всегда можетъ быть вкратцѣ и воилюбъ точно формулирована, чего далеко нельзя сказать о задачахъ алгебраическихъ. Если распредѣлять рѣшеніе задачъ арифметическихъ въ видѣ строчекъ, то каждая изъ строчекъ отвѣчаетъ на какой нибудь частный вопросъ, не представляющій особенныхъ затрудненій при своемъ формулированіи.

При разрѣшеніи, напр., второй изъ выше разсмотрѣнныхъ задачъ (которая безъ особенно большой погрѣшности можетъ быть припята за задачу чисто-арифметическую), получается слѣдующій рядъ строчекъ:

$$\begin{array}{l}
 1) \qquad \qquad \qquad 3 \text{ р.} \times 7. \\
 2) \qquad \qquad \qquad 7 \text{ р.} \times 5. \\
 3) \qquad \qquad 3 \text{ р.} \times 7 + 7 \text{ р.} \times 5. \\
 4) \qquad \qquad \qquad 4 \text{ р.} \times 2. \\
 5) \qquad \qquad \qquad 6 \text{ р.} \times 3. \\
 6) \qquad \qquad 4 \text{ р.} \times 2 + 6 \text{ р.} \times 3. \\
 7) \qquad (3 \text{ р.} \times 7 + 7 \text{ р.} \times 5) + (4 \text{ р.} \times 2 + 6 \text{ р.} \times 3).
 \end{array}$$

Эти строчки по порядку выражаютъ: 1) Сколько заплачено за сукно, 2) сколько за бархатъ, 3), сколько за то и за другое, 4) сколько лица, о которомъ рѣчь, могло бы еще истратить на сукно, 5) сколько на бархатъ, 6) сколько оно могло всего истратить, кромѣ того, что имъ уже истратено, и 7) сколько всего у этого лица было денегъ. Далекое не въ такой же степени простые вопросы большинства алгебраическихъ задачъ. Приведенная выше алгебраическая задача сводится всего къ тремъ строчкамъ:

$$\begin{array}{l}
 1) \qquad 28 \text{ р.} + 92 \text{ р.} \\
 2) \qquad 10 \text{ к.} - 8 \text{ к.} \\
 3) \qquad (28 \text{ р.} + 92 \text{ р.}): (10 \text{ к.} - 8 \text{ к.}),
 \end{array}$$

по за-то каждая изъ нихъ выражаетъ рядъ идей и мыслей, не поддающихся столь краткой и ясной формулировкѣ, какую допускаютъ выше рассмотрѣнныя семь строчекъ чисто арифметической задачи. Дѣйствительно: первая строчка занимающей насъ алгебраической задачи отвѣчаетъ на слѣдующій, весьма сложный, вопросъ: *если торговецъ станетъ продавать ситица по десяти коп. за аршинъ, то на сколько онъ больше выручитъ денегъ противъ того количества ихъ, которое онъ выручилъ бы, продавая ситица по восьми копеекъ?* Вторая строчка, включая въ себѣ идею о причинѣ такой разницы въ выручкѣ, отвѣчаетъ на вопросъ: *сколько торговецъ получаетъ лишку на каждомъ аршинѣ ситца, продавая его по 10-ти коп., противъ того, сколько онъ получалъ бы за аршинъ, продавая его по 8-ми коп.?* И только третья строчка отвѣчаетъ на простой сравнительно вопросъ: *сколько у торговца оставалось ситца*, по очевидно, что самый характеръ и форма вопросовъ только что рассмотрѣнной задачи совсѣмъ иные. Это еще не все: въ то время какъ въ сложной чисто-арифметической задачѣ между строчками (если можно такъ выразиться) лежатъ идеи очень понятныя и доступныя при одномъ взглядѣ на строчку, между строчками задачи алгебраической надо прочесть идеи болѣе или менѣе скрытыя и для большинства дѣтей мало-доступныя. Такъ, между строчками первую и вторую нашей алгебраической задачи лежитъ, какъ выше замѣчено, идея о причинѣ избытка, а между второй и третьею—идея о томъ, что полученный избытокъ зависитъ исключительно отъ разности между цѣною аршина въ одномъ и цѣною аршина въ другомъ случаѣ. Даже болѣе того: постановка первой строчки уже предполагаетъ такой

рядъ разсужденій, къ какому никогда не приходится прибѣгать при разрѣшеніи задачи, хотя бы и очень сложной, изъ числа чисто-арифметическихъ.

Послѣ всего вышесказаннаго намъ будетъ очень легко ориентироваться въ вопросѣ о значеніи алгебраическихъ задачъ. Задачи сложныя изъ числа чисто-арифметическихъ могутъ, укрепляя вниманіе учащихся и развивая ихъ рѣчь и способность къ пониманію рѣчи, въ то же время имѣть и некоторое значеніе для обученія арифметикѣ какъ таковой, служа къ дальнѣйшему усвоенію цѣли арифметическихъ дѣйствій и ихъ взаимныхъ отношеній. Задачи же алгебраическія вообще не въ состояніи оказать при обученіи тѣхъ-же услугъ. Ибо, при неспособности большинства дѣтей къ математическимъ приемамъ мышленія и при недостаточномъ развитіи въ нихъ стремленій къ анализу, вниманіе дѣтей на алгебраическихъ задачахъ изощряется очень мало; столь же мало изощряется также и рѣчь ихъ; наконецъ, для обученія арифметикѣ какъ таковой, эти задачи тоже мало полезны, не содѣйствуя усвоенію дѣйствій и ихъ соотношеній.

Понявъ даже всѣ слова, заключающіяся въ данной алгебраической задачѣ, понявъ даже и условія ея, дѣти далеко еще не подготовлены къ анализу условій задачи, если они не достаточно упражнялись въ этомъ спеціальномъ направленіи. Дѣло въ томъ, что одно пониманіе и знаніе четырехъ дѣйствій, будучи вполне необходимымъ условіемъ логическаго рѣшенія алгебраической задачи, далеко еще недостаточно для того, чтобы задача была вѣрно и логично разрѣшена. Какъ, въ самомъ дѣлѣ, разрѣшить алгебраическую задачу, если къ ней приступить только съ знаніемъ четырехъ дѣйствій и безъ болѣе или менѣе тонкаго анализа, который въ задачахъ простыхъ и даже сложныхъ изъ числа чисто-арифметическихъ отличается чрезвычайною краткостью и непосредственностью? Для рѣшенія алгебраической задачи, кромѣ знанія четырехъ дѣйствій, необходимъ еще особенный, спеціальный, болѣе или меньшій навыкъ въ анализѣ.

Не вдаваясь пока въ дальнѣйшее обсужденіе вопроса о роли задачъ алгебраическаго характера, мы тѣмъ не менѣе изъ предыдущаго можемъ сдѣлать тотъ выводъ: что 1) ученія арифметики не оказываютъ особенныхъ услугъ при разрѣшеніи задачъ этого рода: они только необходимы для возможности рѣшенія, но для того не достаточны, и 2) обученію арифметикѣ, какъ таковой, задачи алгебраическія, въ свою очередь, тоже не оказываютъ никакихъ услугъ, такъ какъ не относятся ни къ теоріи, ни къ практикѣ арифметическихъ дѣйствій.

Каково же въ такомъ случаѣ истинное значеніе этого рода задачъ въ школѣ? Ознакомленіе дѣтей съ аналитическою формою мышленія, конечно, полезно въ развивательномъ отношеніи, если

дѣти къ этому подготовлены и если данная школа имѣетъ въ распоряженіи своемъ достаточное для того количество времени. Увлеченіе задачами алгебраическими въ ущербъ самому курсу арифметики, поэтому, не заслуживаетъ никакого сочувствія, если на дѣло смотрѣть съ точки зрѣнія требованій обученія арифметикѣ. Это тѣмъ справедливѣе, что въ самомъ прохожденіи подлежащаго курса арифметики заключается гораздо болѣе развивательныхъ моментовъ, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда. Обученіе вообще оказываетъ на дѣтскій умъ въ высшей степени важное и полезное воспитательное вліяніе: оно внушаетъ дѣтямъ должное уваженіе къ уму человѣческому и прививаетъ имъ такую массу умственныхъ навыковъ, что въ сравненіи съ ними навыкъ въ рѣшеніи алгебраическихъ задачъ, по причинѣ крайней своей специфичности, является навыкомъ, которому можно приписать только второстепенное значеніе. Лучшимъ доказательствомъ справедливости этого взгляда можетъ служить то обстоятельство, что можно указать массу людей, имѣющихъ полнѣйшее право считать себя людьми истинно образованными, но не могущихъ похвастать ни малѣйшимъ умѣніемъ разрѣшать задачи алгебраическаго характера. Къ тому же и практическая жизнь рѣдко предлагаетъ намъ такія задачи, которыя носили бы алгебраическій характеръ: большинство задачъ, представляющихся въ практической жизни, носятъ характеръ чисто арифметическій. Итакъ, чисто алгебраическимъ задачамъ придается обыкновенно скорѣе слишкомъ большое, чѣмъ слѣдуетъ малое, значеніе, роль ихъ скорѣе преувеличивается, чѣмъ игнорируется; а потому учитель скорѣе рискуетъ повредить успѣху школьнаго дѣла, чѣмъ быть ему полезнымъ, если онъ не отвѣдетъ этимъ задачамъ подобающаго имъ мѣста *).

*) Намъ неоднократно приходилось видѣть учениковъ высшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, которые не были, несмотря на довольно основательное знаніе среднеобразовательнаго курса математики, въ состояніи безъ помощи системы уравненій разрѣшить известную задачу, гласящую:

Одинъ пастухъ сказалъ другому: „отдай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у меня будетъ вдвое болѣе, чѣмъ у тебя“. — Игнорировавъ ему другой: отдай лучше ты мнѣ одну изъ своихъ овецъ, и у насъ будетъ поровну. Сколько у каждого изъ нихъ овецъ?

Трудность не-алгебраическаго рѣшенія этой задачи заключается въ томъ, что по порядку надо изслѣдовать слѣдующіе семь вопросовъ: 1) у котораго изъ пастуховъ больше? 2) если бы первый пастухъ одну овцу отдалъ *третьему* лицу, то у котораго изъ пастуховъ и на сколько было бы больше, чѣмъ у второго? (у перваго одною овцою больше) 3) если бы онъ не отдавалъ никому ни одной овцы, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на двѣ); 4) если бы второй пастухъ отдалъ *третьему* лицу одну овцу, на сколько у перваго было бы въ этомъ случаѣ больше овецъ, чѣмъ у второго? (на три овцы), 5) если бы онъ отдалъ эту овцу второму пастуху, то на сколько у него было бы больше овецъ, чѣмъ у второго? (на четыре); 6) по по условію у него въ этомъ

Очевидно во всякомъ случаѣ, что въ подготовительныхъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній задачи алгебраическаго характера неумѣстны ни съ какой точки зрѣнія. Къ сожалѣнію, въ большинствѣ употребительныхъ въ этихъ классахъ задачникѣвъ этотъ взглядъ не принятъ во вниманіе.

Что касается роли такъ называемыхъ арифметическихъ примѣровъ при обученіи арифметикѣ, то ихъ значеніе чаще всего чисто практическое: упражняясь въ вычисленіи примѣровъ, дѣти пріобрѣтаютъ навыкъ въ *производствѣ* дѣйствій. Мы уже видѣли, что между производствомъ дѣйствій и ихъ логической стороной есть глубокая разница: съ логической и спеціально-арифметической точки зрѣнія всякое арифметическое дѣйствіе подчиняется только требованіямъ логики и арифметики; въ вопросѣ же о производствѣ дѣйствій важную роль играютъ также и требованія практическія: требованія удобства, быстроты, намыслности, вразумительности и т. д. На примѣрахъ дѣти научаются *расположить* вычисленія сообразно тѣмъ образцамъ, которые имъ даны учителямъ. Повѣрно, что въ вычисленіи примѣровъ дѣти должны упражняться по возможности старательно и неустанно, и притомъ безъ непосредственной помощи учителя: только тотъ научается вѣрному и быстрому вычисленію, кто самъ много упражнялся въ этомъ направленіи. Такъ какъ, согласно „Учебнымъ планамъ“ преподаванія въ классическихъ гимназіяхъ въ первомъ классѣ должны быть повторены арифметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами, то это доказываетъ, что въ подготовительномъ классѣ эти дѣйствія должны быть усвоены практически. По нашему крайнему разумію, въ этомъ классѣ и при домашнемъ первоначальномъ обученіи особенное вниманіе должно быть обращено на выясненіе цѣлей дѣйствій и на усвоеніе дѣтьми практическаго умѣнія вычислять. Поэтому изобиліе работы учащихся надъ примѣрами въ этомъ классѣ и при домашнемъ первоначальномъ обученіи крайне желательно: оно возможно по сравнительной легкости техники дѣйствій, а желательно, между прочимъ, и въ виду требованій программы.

§ 9. Способы рѣшенія арифметическихъ задачъ могутъ быть подведены подъ три категоріи: 1) Задачи простые изъ числа

случаѣ было бы вдвое болѣе, чѣмъ у второго, стало-быть сколько у второю въ этомъ случаѣ овецъ? (четыре); 7) сколько у него было равѣ? (пять), 8) а сколько у перваго? (семь). Эти вопросы здѣсь приведены для того, чтобы показать, какая данная цѣль ихъ необходима, чтобы привести къ рѣшенію задачи, повидимому вовсе не особенно запутанной— ни въ числовомъ, ни въ словесномъ отношеніи. Келати позволимъ себѣ при этомъ предложить читателю разсмотрѣть, въ какомъ „строчкѣмъ“ ведется эта задача. Это будетъ ему полезно для лучшаго уясненія себѣ содержанія выше выказаннаго соображенія о трудности формулированія значенія каждой строчки, когда мы имѣемъ дѣло съ задачей алгебраическою.

чисто-арифметическихъ не требуютъ ни анализа, ни установленія плана рѣшенія; поэтому способъ ихъ рѣшенія зависитъ исключительно отъ смысла условій, и если учащійся только понимаетъ эти условія, то онъ безосновочно останавливается на томъ изъ четырехъ арифметическихъ дѣйствій, которое должно быть примѣнено при рѣшеніи этой задачи. Если же учащійся вмѣсто одного дѣйствія (напр., сложенія) прибѣгаетъ къ другому (къ вычитанію или умноженію), то этимъ доказывается только то, что онъ или условія задачи, или логическаго смысла арифметическихъ дѣйствій еще не понимаетъ. При этомъ выясненіе *причины*, почему въ данномъ случаѣ, при рѣшеніи данной простой арифметической задачи, должно прибѣгнуть къ тому, а не иному арифметическому дѣйствію, возможно только на основаніи опредѣленія этого дѣйствія, а не на основаніи какихъ либо разсужденій. Для разъясненія возьмемъ рядъ задачъ:

а) Въ первомъ отдѣленіи школы 24 уч., во второмъ 17. Сколько учащихся въ обоихъ отдѣленіяхъ вмѣстѣ?

б) Въ другой школѣ къ началу года было 52 учащихся; къ концу года изъ нея вышло по разнымъ причинамъ 19 человекъ. Сколько въ цей послѣ этого осталось учениковъ?

в) Въ началѣ урока каждому изъ 15 учениковъ второго отдѣленія было выдано по два листа бумаги. Сколько бумаги выдано всѣмъ 15-ти учащимся?

г) 14 учениковъ старшаго отдѣленія получили въ началѣ года 154 перьевъ всѣ получили поровну. По сколько перьевъ досталось каждому изъ нихъ.

д) Въ другой разъ 260 перьевъ были розданы ученикамъ младшаго отдѣленія; каждый получалъ по десяти перьевъ. Сколько въ школѣ было учениковъ младшаго отдѣленія?

Для рѣшенія первой задачи, надо прибѣгнуть къ сложенію, для рѣшенія второй—къ вычитанію, и т. д. При обученіи дѣтей, еще недостаточно владѣющихъ рѣчью вообще и диалектическими приѣмами въ особенности (къ числу такихъ дѣтей принадлежитъ большинство учащихся въ притовительныхъ классахъ), неосновательно было бы на первыхъ ступеняхъ обученія требовать не только „анализа“ подобныхъ задачъ и установленія „плана“ рѣшенія, но даже и объясненія—почему въ первой задачѣ примѣняется сложеніе, во второй вычитаніе и т. д. На этой ступени обученія учащій долженъ строжайше слѣдить только за тѣмъ, чтобы учащійся понимали логическій смыслъ дѣйствій и вполнѣ сознательно относились къ условіямъ простыхъ чисто-арифметическихъ задачъ. Дѣлю въ томъ, что задачи этого рода поддаются только крайне искусственному анализу и что единственнымъ оправданіемъ примѣненія того или иного арифметическаго дѣйствія къ рѣшенію данной простой чисто-арифметической задачи можетъ служить подведеніе условій этой задачи подъ опредѣленіе того или иного дѣйствія. Иначе говоря: если

у насъ есть рядъ болѣе или менѣе точныхъ опредѣлений сложена, вычитанія, умноженія и дѣленія, то примѣненіе того или иного дѣйствія можетъ быть оправдано только ссылкой на опредѣленіе и подлѣденіемъ условій задачи подъ это опредѣленіе; если же такого ряда опредѣлений нѣтъ въ нашемъ распоряженіи, то никакія „разсужденія“ не въ состояніи доказать, что въ данномъ случаѣ требуется сдѣлать сложение, а въ другомъ случаѣ вычитаніе или умноженіе, и т. д. Поэтому, повторяемъ, учащій въ этомъ послѣднемъ случаѣ всякій разъ долженъ только удостовѣриться—понимаютъ ли учащіеся фактическую зависимость дѣйствія отъ условій задачи: если понимаютъ, хорошо, если же пониманія не замѣчается, то онъ долженъ прежде всего позаботиться объ успѣхѣн логической стороны каждаго дѣйствія.

Для того чтобы уясненіе дѣтямъ, на первыхъ ступеняхъ обученія, понятій объ ариометическихъ дѣйствіяхъ было возможно безъ помощи опредѣленій (которыхъ ученики приготовительныхъ классовъ понять не въ состояніи), необходимо имѣть въ распоряженіи методически подобранный матеріалъ для упражненія дѣтей въ рѣшеніи соответствующихъ задачъ простыхъ изъ числа чисто-аріометическихъ и раздѣлѣть примѣровъ. На такія задачи учитель долженъ поэтому обратить особенное вниманіе, ибо на первыхъ ступеняхъ обученія задачи должны настолько разъяснять цѣль и смыслъ ариометическихъ дѣйствій, чтобы точное, научное опредѣленіе дѣйствія было, до поры до времени, совершенно не нужно.

2) При рѣшеніи сложныхъ чисто-аріометическихъ задачъ учащіеся должны быть пріучены какъ къ анализу задачъ, такъ и къ установленію плана ихъ рѣшенія. Всякая сложная задача изъ числа чисто-аріометическихъ допускаетъ расчлененіе ея на известное количество задачъ простыхъ, рѣшеніе которыхъ требуетъ примѣненія только одного изъ четырехъ ариометическихъ дѣйствій. Расчлененіе это не только для учащаго, но и для учащихъ не представляетъ особенныхъ затрудненій, если учащій не вдругъ, а постепенно переходитъ отъ менѣе сложныхъ къ болѣе сложнымъ. Лучше всего, если въ рукахъ учащаго находится методически-подобранныя совокупности задачъ сложныхъ изъ числа чисто-аріометическихъ, ибо въ противномъ случаѣ учащему приходится постоянно подыскивать задачи, болѣе или менѣе подходящія къ требованіямъ даннаго момента обученія. Что же касается способовъ рѣшенія этого рода задачъ, то онѣ допускаютъ не только установленіе плана рѣшенія, но и анализъ. Но надо при этомъ замѣтить, что анализъ задачъ этого рода болѣею частью не отличается особенною естественностью; условия настолько явно разбиваютъ данную сложную задачу на цѣлый рядъ задачъ простыхъ, что естественнѣе всего начинать

дѣло прямо съ установленія плана рѣшенія. Только очень немногія изъ числа чисто-арифметическихъ задачъ представляютъ такія затрудненія при установленіи плана рѣшенія, что лучше сначала приблѣгнуть къ элементарнѣйшимъ приемамъ анализа. При этомъ умѣстно присовокупить, что значеніе задачъ дѣйствительно трудныхъ (изъ числа чисто-арифметическихъ) весьма незначительно какъ съ точки зрѣнія арифметической, такъ и съ точки зрѣнія развитія въ дѣтяхъ какихъ либо особенно полезныхъ умственныхъ навыковъ, такъ какъ вся трудность ихъ можетъ заключаться только въ особенномъ изобиліи вычисленій.

3) Наконецъ, что касается задачъ алгебраическаго характера, то для рѣшенія ихъ примѣненіе аналитическихъ приемовъ необходимо, такъ какъ въ противномъ случаѣ задачи эти являются ничѣмъ не мотивированнымъ и даже вреднымъ наростомъ на томъ исполнѣннѣ стройномъ цѣломъ, которое извѣстно подъ именемъ арифметики. Единственное значеніе задачъ алгебраическаго характера заключается въ тѣхъ полезныхъ умственныхъ навыкахъ, которые могутъ быть приобретены при ихъ рѣшеніи. Само собою разумѣется, что такого общаго правила, пользуясь которымъ можно было бы разрѣшить любую арифметическую задачу алгебраическаго характера, не существуетъ. Даже чисто алгебраическій способъ рѣшенія („помощью x^2 “, какъ обыкновенно характеризуютъ этотъ способъ) требуетъ иногда такой сноровки и такихъ спеціальныхъ приемовъ, которые не могутъ быть включены въ рамки общаго правила, всегда выручающаго насъ изъ затрудненій. Тѣмъ въ большей степени это справедливо относительно тѣхъ аналитическихъ приемовъ, которые игнорируютъ алгебраическую сторону дѣла.

Вообще на тотъ приемъ мышленія, который извѣстенъ подъ именемъ анализа, не слѣдуетъ смотрѣть какъ на приемъ, который будто бы чрезвычайно легко приложимъ, если только знаешь въ чемъ онъ состоитъ. Этого знанія далеко еще не достаточно для его приложенія. Анализъ есть такая умственная операція надъ даннымъ вопросомъ, примѣняя которую мы всегда должны имѣть въ виду индивидуальныя, совершенно специфическія особенности этого вопроса. Если вы знаете только то, что анализъ переходитъ отъ частнаго къ общему, то этого знанія еще далеко недостаточно для того, чтобы вы могли, въ каждомъ данномъ случаѣ, примѣнить (конечно, съ успѣхомъ и съ пользой для дѣла) этотъ приемъ мышленія. Мы не говоримъ уже о томъ, что примѣняя его съ успѣхомъ къ арифметическимъ вопросамъ, вы не въ состояніи будете его примѣнить къ вопросамъ геометрическимъ или психологическимъ; въ предѣлахъ даже одной и той же области вы въ одномъ случаѣ сдѣлаете цѣлесообразное примѣненіе этого приема, а въ другомъ окажется, что вы совершенно безсильны

предъ трудностями данного вопроса. Возьмите для примѣра задачу объ овдахъ, разобранную выше въ примѣчаніи: она требуетъ такой массы операцій, что, обладая даже весьма большою опытностью въ самомъ искусствѣ анализированія, можно стать втупикъ предъ трудностями этой задачи, повидимому вовсе не замысловатой. Есть задачи алгебраическаго характера, которыя подводятся подъ нѣкоторыя категоріи, изъ коихъ каждая требуетъ своего особеннаго аналитическаго приѣма: таковы задачи, когда даны сумма и разность, сумма и частное двухъ чиселъ и т. д. Каждая изъ задачъ этого рода (конечно, въ случаѣ надобности) должна быть подвергнута анализу, послѣ чего долженъ быть установленъ и планъ ея рѣшенія. Но это важно вовсе не въ смыслъ обученія ариѳметикѣ, какъ таковой, т. е. не въ смыслъ обученія четыремъ дѣйствіямъ; это важно даже не въ смыслѣ пріобрѣтенія дѣтми умѣнія и навыка въ рѣшеніи задачъ алгебраическаго характера, каковыхъ задачъ имъ жизнь можетъ быть не станеть задавать; это важно только для пріученія дѣтей къ одной, весьма существенной въ развѣвительномъ отношеніи, мысли, — къ мысли о существованіи особенныхъ, спеціальныхъ искусственныхъ приѣмовъ мышленія. Важно, чтобы учащійся на дѣлѣ, во-очію, убѣдился въ возможности и существованіи особенныхъ приѣмовъ мышленія, при помощи которыхъ можно, что называется, „распутать“ задачу *на основаніи ея условий*, пользуясь при этомъ только неустаннымъ разсужденіемъ надъ этими условиями.

Легко видѣть, что при тѣхъ обязанностяхъ, которыя лежатъ на учащихъ и учащихся въ приготовительныхъ классахъ, и при тѣхъ незначительныхъ требованіяхъ, которыя могутъ быть съ нѣкоторымъ правомъ предъявлены къ умственному и діалектическому развитію учащихся приготовительныхъ классовъ, — легко видѣть, что при этихъ условіяхъ задачи изъ числа алгебраическихъ, какъ это замѣчено выше, въ этихъ классахъ и при первоначальномъ домашнемъ обученіи нецѣлесообразны ни съ практической, ни съ педагогической точки зрѣнія. Главнѣйшая цѣль обученія ариѳметикѣ въ этихъ случаяхъ должна состоять въ усвоеніи дѣтми самыхъ простыхъ, очевидныхъ примѣненій четырехъ дѣйствій и усвоеніи или обычныхъ способовъ производства этихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами.

§ 10. Однимъ изъ основныхъ принциповъ современной дидактики, какъ это выяснено выше, является принципъ наглядности всяческаго обученія, точно установленный Яномъ Коменскимъ и Гейнрихомъ Песталоцци. Этотъ принципъ вообще подтверждается также и тѣми ученіями психологій, которыя могутъ найти примѣненіе къ этому спеціальному вопросу педагогики, ибо хотя не все наши знанія вытекаютъ изъ опыта, но все знанія пріобрѣтаются нами *ни-ряду* съ опытомъ, такъ сказать, рука объ руку съ

нимъ (Каптъ). Однако само собою разумеется, что въ каждой области обученія и воспитанія принятые этотъ неизменно должны считаться со специфическими особенностями этой области и что справедливые выводы, къ которымъ этотъ принципъ приводитъ въ одномъ предметѣ обученія, къ другому предмету могутъ оказаться вполне непримѣнимыми. Каждый предметъ обученія представляетъ случаи къ примѣненію этого важнѣйшаго въ дидактикѣ принципа; но въ разныхъ предметахъ эти случаи въ этомъ отношеніи различны: одинъ предметъ обученія требуетъ болѣе или менѣе постояннаго и непосредственнаго обращенія къ органу зрѣнія (письмо, рисованіе), другой—такого же обращенія къ органамъ зрѣнія и слуха, третій вовсе не допускаетъ исполнѣ нагляднаго разсмотрѣнія даннаго предмета (напр., логика), а четвертый прибѣгаетъ главнымъ образомъ къ воображенію, только изрѣдка пользуется картинкою, чертежомъ, и т. д.

Въ главѣ II-й этого сочиненія мы выяснили себѣ характеръ тѣхъ ученій, съ которыми должна считаться арифметика. Мы видѣли, что разъ только понятія числа, единицы, счета, сложенія и величины существуютъ, то остальные ученія вытекаютъ уже чисто-логическимъ путемъ изъ этихъ понятій и изъ системы счисленія. Въ то время какъ послѣднія принадлежатъ къ ученіямъ, основаннымъ исключительно на нѣкоторомъ произвольномъ условіи, которое должно быть разъяснено, остальные упомянутыя понятія принадлежатъ къ числу элементарныхъ, первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленіямъ и составляемыхъ человѣческимъ умомъ на пути психологическомъ, а не логическомъ: умъ долженъ набраться извѣстной массы *опыта* для того, чтобы стало возможно образованіе этихъ понятій. Принявъ это во вниманіе, мы легко придемъ къ заключенію, что при обученіи арифметикѣ къ помощи наглядныхъ пособій безусловно необходимо прибѣгать въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) При обученіи счету, если мы имѣемъ дѣло съ дѣтьми, не обладающими исполнѣ этимъ умѣнѣемъ и не понимающими цѣли и особенностей этого процесса;

2) При выясненіи понятія о сложеніи;

3) При выясненіи понятія о величинѣ и ея измѣреніи и понятія о единицахъ мѣры.

Но такъ какъ система счисленія есть не иное что, какъ нѣкоторое изобрѣтеніе человѣческаго ума, которое вовсе само собою не разумеется, то къ этимъ тремъ случаямъ присоединяется еще четвертый: наглядныя пособія необходимы также и

4) При выясненіи десятичной системы, если мы имѣемъ дѣло съ ребенкомъ, ея не знающимъ.

Счетъ, строго говоря, предполагается арифметикою извѣстнымъ, но при домашнемъ, а иногда и при школьномъ обученіи,

приходится включить и это умѣніе въ число умѣній, которыя должны быть усвоены на урокахъ ариѳметики. При обученіи счету наилучшими наглядными пособіями, въ самомъ началѣ обученія, могутъ, кромѣ пальцевъ, служить числовыя фигуры, какіе-нибудь однородные предметы (кашечки, монеты, кубики), а при устномъ ознакомленіи съ десятичною системою наиболѣе цѣлесообразнымъ пособіемъ являются налочки, снѣжки, такъ называемая „солома“. Употребленіе классныхъ и торговыхъ счетовъ удобно только для разъясненія письменнаго обозначенія чиселъ помощью цифръ и при обученіи производству сложенія и вычитанія многозначныхъ чиселъ. Что же касается брусковъ для обозначенія десятковъ или досокъ для обозначенія сотенъ, то къ этимъ пособіямъ такъ называемого ариѳметическаго ящика, на только что упомянутыхъ ступеняхъ обученія, лучше не обращаться. Дѣлю въ томъ, что при письменномъ обозначенія чиселъ и письменномъ же производствѣ дѣйствій эти пособія скорѣе искажаютъ, чѣмъ укрѣпляютъ вѣрное представленіе объ условности десятичной системы счисленія и услугахъ, которыя условность эта оказываетъ при письменномъ производствѣ дѣйствій; при обученіи же устному счету эти пособія ровно никакой полезной роли играть не могутъ, такъ какъ это обученіе сводится только къ усвоенію дѣтьми извѣстныхъ словъ и ихъ натурального порядка и къ усвоенію ими понятія о самой цѣли этого процесса.

Вообще дѣло вовсе не въ изобиліи и разнообразіи часто далеко не остроумныхъ учебныхъ пособій, рекомендуемыхъ тѣмъ или инымъ педагогомъ: на занимающей насъ ступени обученія совершенно излишни счета разныхъ видовъ и названій, доски съ дырочками и т. п.; а на слѣдующихъ эти пособія не нужны по той простой причинѣ, что дальнѣйшія ученія ариѳметики строятся на логическихъ основаніяхъ и притомъ съ помощью цѣлесообразнаго подбора задачъ и упражненій въ вычисленіи. Важное значеніе чаще всего имѣютъ, такъ сказать, естественныя учебныя пособія, и чѣмъ ближе какое-либо пособіе къ одному изъ естественныхъ, которыми человекъ пользовался испоконъ-вѣковъ, тѣмъ лучше. Лучшими изъ искусственныхъ пособій несомнѣнно являются: такъ называемый ариѳметическій ящикъ (безъ досокъ и брусковъ), торговые счета, а для класснаго употребленія—торговые счета большихъ противъ обыкновеннаго размѣровъ, шведскіе счета, представляющіе собою только видоизмѣненіе торговыхъ, и наконецъ такъ называемая „солома“.

Ариѳметическій ящикъ обыкновенно заключаетъ въ себѣ: а) 100 отдѣльныхъ кубиковъ; б) 30 или 40 прямоугольныхъ параллелепипедовъ, брусковъ; основаніе каждаго изъ нихъ равно основанію, а высота—удесятеренной высотѣ кубика; в) 3 или 6 прямоугольныхъ параллелепипедовъ, досокъ; основаніе каждой изъ

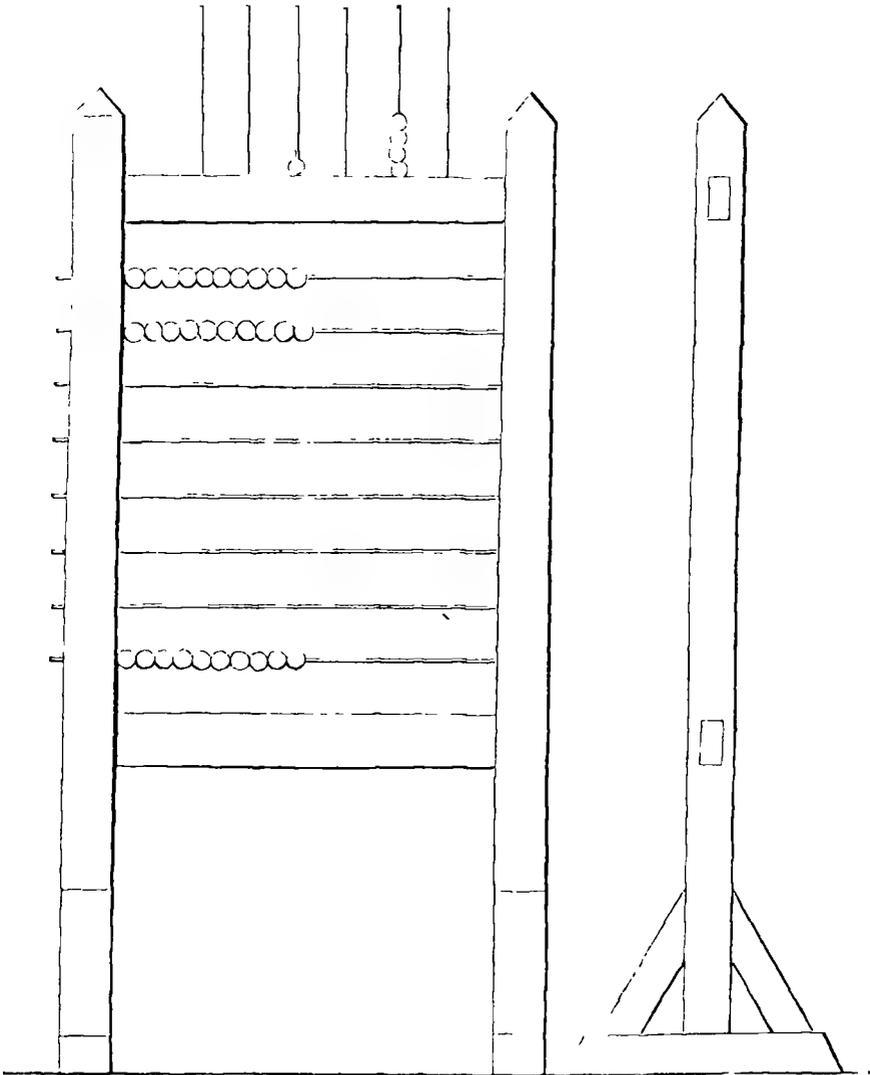
нихъ въ сто разъ больше основаніи кубика, а высота равна высотѣ его.—Изъ всѣхъ этихъ предметовъ полезны, какъ это выше уже замѣчено, только кубики; бруски же и доски не оказываютъ полезной помощи при обученіи ариметикѣ. Въ виду этого, школы, въ которыхъ нѣтъ арифметическаго ящика, строго говоря, и не должны бы покупать его въ магазинахъ учебныхъ пособій: всякій плотникъ или столяръ, по указаніямъ учащаго, а то и самъ учащій, могутъ приготовить сотню-другую кубиковъ.

2) Торговые счеты извѣстны всѣмъ и каждому, а потому ихъ описаніе было бы излишнимъ. Должно только замѣтить, что большій размѣръ счетовъ при классномъ обученіи не только желателенъ, но даже просто необходимъ для того, чтобы ученики, сидящіе далеко отъ доски, могли ясно различать отдѣльныя точки счетовъ. Полагно, что тѣ школы, въ которыхъ нѣтъ такихъ счетовъ, но есть такъ называемые шведскіе, не должны приобретать непремѣнно торговые счеты. Но гдѣ нѣтъ ни тѣхъ, ни другихъ, тамъ желательно приобретение торговыхъ счетовъ преимущественно предъ шведскими, такъ какъ первые сравнительно дешевле и въ жизни употребительнѣе послѣднихъ *).

3) Шведскіе счеты (см. черт.) состоятъ изъ четырехугольной рамки, стоящей на ножкахъ. Въ ней продѣто восемь или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ свободно можетъ двигаться по десяти деревянныхъ шаровъ. Кромѣ того, на верхнемъ брускѣ рамки находятся нѣсколько вертикальныхъ проволокъ, на которыхъ могутъ быть надѣты отдѣльные шары, имѣющіеся при счетахъ. Шведскіе счеты, равно какъ и торговые, не принадлежатъ къ числу тѣхъ учебныхъ пособій, которыя могутъ быть приготовлены самимъ учителемъ, въ особенности, если онъ не знаетъ столярнаго мастерства; но плотникъ или столяръ, при указаніяхъ учащаго, можетъ изготовить раму со шпательномъ, или безъ оного, которая составляетъ остовъ этого пособія. Въ сто шаровъ, если ихъ некому выточить, можно прибѣгнуть къ полымъ цилиндрамъ съ закругленными краями; проволока можетъ быть всегда куплена для счетовъ по болѣе или менѣе дешевой цѣнѣ, и соединеніе всѣхъ этихъ частей въ одно цѣлое не пред-

*) До какого увлеченія иногда доходятъ изобрѣтатели различныхъ учебныхъ пособій, можно видѣть изъ слѣдующаго извѣстнаго въ исторіи педагогики факта. По мнѣнію Песталоцци, квадратъ есть лучшее учебное пособіе, какое только можно себѣ представить. Оно, по его мнѣнію, можетъ служить цѣлямъ обученія рисованью, письму, чтенію, геометріи и ариметикѣ; теперь квадрату не приписывается подобнаго значенія, но самъ Песталоцци выразился объ этомъ своемъ изобрѣженіи слѣдующимъ образомъ: «если жизнь моя имѣетъ какую-либо цѣну, то только благодаря тому, что я положилъ квадратъ въ основу возрѣвній, которыми доселѣ никто не пользуется». Комментарій, конечно, излишенъ.

ставить трудности для человека, даже и не особенно искусного в мастерствахъ.



4) Что касается, наконецъ, „соломы“, то это пособіе состоитъ изъ сотни-другой палочекъ одинаковой длины и можетъ оказать неоцѣненные услуги при прохожденіи нумераціи и разъясненіи самаго производства дѣйствій сложенія и вычитанія двузначныхъ

чисель. Лучше всего, если палочки имѣютъ въ длину около полуаршина, а толщину не менѣе толщины карандаша. Конечно, изготовленіе этого учебнаго пособія для учителя не представитъ уже никакихъ затрудненій. Въмѣсто выструганныхъ или выточенныхъ палочекъ можно довольствоваться (въ мѣстностяхъ, гдѣ растутъ камыши или растенія съ подходящими стволами) палочками естественными (палочками изъ ракитника, ливы, вербы, осины).

Выше указаны только случаи, когда употребленіе наглядныхъ пособій необходимо. Во избѣжаніе недоразумѣній укажемъ случаи, когда оно только дозвоительно, а также случаи, когда оно даже вовсе недозвоительно по своей бесполезности и по прямому вреду, который можетъ быть ими оказанъ на умъ учащихся. На первомъ планѣ стоятъ въ числѣ случаевъ, когда прибѣгать къ нагляднымъ пособиямъ дозвоительно, случаи, требующіе выясненія нѣкоторыхъ понятій, для которыхъ оказывается почему-либо недостаточнымъ рядъ задачъ, но требуется помощь наглядныхъ пособій; такіе случаи могутъ при недостаточномъ развитіи класса представиться при выясненіи цѣли и смысла ариметическихъ дѣйствій. Но при этомъ наглядныя пособія и, если можно такъ выразиться, *наглядныя дѣйствія* должны употребляться исключительно для выясненія *цѣли, логическаго смысла* дѣйствія, но не для опредѣленія ихъ результата. Далѣе дозвоительно употребленіе наглядныхъ пособій при выясненіи понятія о дроби, какъ о части цѣлаго и о взаимномъ соотношеніи простѣйшихъ дробей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Зато отнюдь недозвоительно употребленіе наглядныхъ пособій въ случаяхъ чисто логическаго характера; оно недозвоительно тогда потому, что оно нецѣлесообразно, вредя надлежащему усвоенію дѣтьми учений этого рода и давая имъ извращенное представленіе объ этихъ ученияхъ. Все то, чему по части учений ариметики человекъ не можетъ научиться самъ собою, что требуетъ особенной, специфической работы мысли, чаще всего не допускаетъ также и при обученіи дѣтей употребленія наглядныхъ пособій, и надежды на то, что наглядныя пособія въ этомъ случаѣ могутъ оказать особенныя услуги, чаще всего оказываются напрасными. Возьмите хотя бы ученеіе объ умноженіи и дѣленіи на дроби, о дѣлителяхъ, о наименьшемъ кратномъ, о періодическихъ дробяхъ; какія услуги могутъ быть при прохожденіи этихъ статей оказаны наглядными пособиями и какія именно изъ этихъ послѣднихъ могутъ быть при этомъ употребляемы? Очевидно, что принципъ наглядности обученія не всегда пригнѣнъ въ прямомъ смыслѣ этого принципа. Выше указаны, между прочимъ тѣ случаи, когда необходимо и когда дозвоительно прибѣгать къ нагляднымъ пособиямъ; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ надо пользоваться цѣлесообразнымъ подборомъ задачъ и упражненій и помнить изреченіе, служащее эпиграфомъ къ этому сочиненію и къ обѣимъ частямъ нашего „Методическа-

го Сборника арифметическихъ задачъ для ср. уч. зав.⁴. Смысль этого изреченія заключается въ томъ, что учащій долженъ всегда ставить учащагося въ такія условія, при которыхъ умъ послѣдняго былъ бы возбуждаемъ къ болѣе или менѣе самостоятельной работѣ въ данномъ направленіи. Гдѣ къ этому не ведутъ наглядныя пособія, тамъ надо прибѣгнуть къ задачамъ и примѣрамъ; гдѣ къ этому не ведутъ задачи и примѣры, тамъ учитель долженъ прибѣгнуть къ катехизаціи. Гдѣ и катехитическая форма обученія ничего не можетъ сдѣлать, тамъ надо примириться съ необходимостью простаго выясненія учащимся даннаго неподатливаго ученія въ краткой и возможно простой формѣ. Впрочемъ, катехитической формѣ обученія при этомъ не должно быть приписываемо то значеніе, котораго она не имѣетъ, а односторонняго, исключительнаго пользованія этою формою должно даже избѣгать по причинамъ, которыя изложены ниже.

§ 11. Относительно катехитической формы обученія существуютъ нѣкоторыя вкоренившіеся въ сознаніе многихъ изъ учителей, въ особенности начальныхъ, такіе предрассудки, отъ которыхъ учащій по возможности долженъ освободиться, если онъ отъ нихъ не совершенно свободенъ.

Встарину обученіе арифметикѣ велось такъ, что весь трудъ при этомъ обученіи падалъ почти исключительно на учащагося: это имѣло мѣсто какъ при обученіи, основанномъ на выучиваніи наизусть текста учебника, такъ и при излагательной (акроаматической) формѣ обученія, основанной на словесномъ изложеніи учителямъ ученій этого предмета, которое похоже скорѣе на неумѣстное чтеніе лекцій, чѣмъ на дѣйствительное обученіе дѣтей. Нѣтъ сомнѣнія, что акроаматическая форма обученія все-таки выше той формы его, которая зиждется на самостоятельномъ, безъ всякой со стороны учителя помощи, выучиваніи дѣтьми наизусть параграфовъ учебника. Но во всякомъ случаѣ результаты обученія въ обоихъ случаяхъ поражаютъ крайнею незначительностью какъ въ матеріальномъ, такъ и въ формальномъ отношеніи. Это, конечно, вполнѣ естественно съ психологической точки зрѣнія; столь же естественно, что отъ указанныхъ формъ обученія пришлось отказаться. Но къ сожалѣнію—вообще нѣтъ и не можетъ быть такой формы обученія, которая могла бы претендовать на исключительное господство въ школѣ. Даже такъ называемая катехитическая форма обученія со всеми ея разновидностями, — форма, которая пользуется особеннымъ сочувствіемъ въ новѣйшихъ курсахъ педагогика, — далеко не можетъ претендовать на безусловную и не допускающую исключеній примѣнимость ея при обученіи арифметикѣ. Въ недавнее время несомнѣнныя достоинства этой формы обученія до такой степени были преувеличены, а предѣлы ея примѣненія до такой степени расширены, что не без-

полезно сдѣлать критическую оцѣнку случаевъ, когда катехизація мало или вовсе не примѣнима при обученіи ариметикѣ.

А ргіогі понятно, что всякое увлеченіе одною только формою обученія неизбежно ведетъ за собою крайнюю искусственность уроковъ и чрезмѣрную, ничѣмъ не вознаградимую, трату золотого времени. Понятно поэтому также и то, что изъ эта случаевъ исключительнаго примѣненія катехитической формы обученія не менѣе девятина представляютъ собою ничѣмъ неоправдываемую, безсодержательную трату времени, не ведущую ни къ какимъ сколько-нибудь цѣннымъ результатамъ.

Прежде всего укажемъ въ курсѣ ариметики цѣлую статью, при прохожденіи которой катехизація можетъ быть только контролирующею, повторительною: такова статья о нумераціи вмѣстѣ со статьею о цифрахъ. Точно также неумѣстна болѣе или менѣе усердная катехизація въ тѣхъ случаяхъ, когда данное ученіе заключаетъ въ себѣ большую или меньшую условность, какое нибудь произвольное соглашеніе, вовсе не лежащее въ самой природѣ предмета, какую нибудь логическую тонкость, которая можетъ быть учащимся только тогда понята, когда на нее вполнѣ ясно и опредѣлительно указала учащій.

Но даже и въ случаяхъ, когда катехизація позволительна, учащій обязательно долженъ, пользуясь своимъ естественнымъ чувствомъ и не обращая вниманія ни на какіе педагогическіе рецепты, пойти по самому естественному, самому прямому пути усненія учащемуся интересующаго его въ данную минуту ученія; онъ не долженъ думать, что окольные пути мысленія дѣтскимъ почему-то доступнѣе прямого. Отступленія отъ прямого пути позволительны только тогда, когда они служатъ цѣлямъ развитія въ дѣтихъ рѣчи; но и въ этомъ случаѣ на отступленіе отъ прямого пути должно смотрѣть именно какъ на отступленіе, не возводи его въ правило и стараясь достигнуть развитія рѣчи иными способами, не увлекаясь болтовнею, правдою, развивающею рѣчь учащаго, но за-то убивающею самодѣятельность дѣтей. Обученіе, пока оно ведется живо и разумно, не допускаетъ шаблонно-образнаго примѣненія только одной формы обученія. Формы обученія должны чередоваться, и слѣдованіе только одной изъ нихъ вредно отзывается не только на матеріальномъ содержаніи урока, но также и на формальномъ, развивательномъ его значеніи.

При малѣйшемъ злоупотребленіи катехизаціе замѣчаются слѣдующія явленія: 1) отсутствіе самодѣятельности учащихся; 2) надежда ихъ на цѣлый рядъ вопросовъ; 3) большая или меньшая неспособность ихъ къ отвѣтамъ безъ ряда вопросовъ; 4) неизбежность подсказывающихъ вопросовъ, разъ катехитическая форма получила преобладающее значеніе при обученіи, и 4) въ результатѣ несоотвѣтствующая достигнутому знанію усталость учителя и учащихся.

Къ счастью среднихъ учебныхъ заведеній, учащіе въ нихъ не столь склонны къ увлеченіямъ катехитической формою обученія, какъ это замѣчается у нѣкоторыхъ учителей начальныхъ школъ. Поэтому вышеизложенное ркомендуется особенному вниманію учащихся въ приготовительныхъ классахъ и учительницъ женскихъ учебныхъ заведеній, хотя пишущему эти строки небезизвѣстно, что чрезмѣрное увлеченіе катехитической формою не есть повсемѣстное явленіе. — Думаемъ, что на насъ не посягуютъ и тѣ изъ помянутыхъ учителей и учительницъ, которымъ вышеизложенное извѣстно изъ собственного опыта или другихъ источниковъ. Еще Гёте замѣтилъ, что „когда желаешь говорить о вещахъ, которыя считаешь неизвѣстными, неизбѣжно скажешь также и что-нибудь извѣстное“.

Наилучшею формою обученія является форма смѣшанная, но лишь постольку, поскольку она безыскусственна и неодносторонна, поскольку она является результатомъ творчества учащаго въ связи съ выработанными имъ педагогическими навыками и присутствующимъ каждому учащему педагогическимъ тактомъ. Перескакивать сознательно отъ одной формы къ другой безъ всякой къ тому надобности, конечно, тоже не слѣдуетъ. Но одно надо помнить, а именно, что имѣешь дѣло съ живыми дѣтьми, которыя не знаютъ никакихъ педагогическихъ рецептовъ и которыя должны быть обучаемы живо и съ интересомъ къ дѣлу со стороны учащаго. Учитель, самъ не интересующійся каждымъ отдѣльнымъ урокомъ, не можетъ внушить къ-нему интереса въ учащихся; шаблоны же и рецепты интереса не могутъ возбуждать ни въ учащемъ, ни тѣмъ менѣе въ учащемся, хотя бы форма обученія была катехитическая или даже смѣшанная.

§ 12. Въ то время какъ предыдущій параграфъ имѣетъ въ виду преимущественно обученіе первоначальное домашнее и школьное—въ первомъ и вообще низшихъ классахъ учебныхъ заведеній, нижеслѣдующій трактуетъ объ учебникѣ и его роли при обученіи, т. е., о вопросѣ, интересномъ для учащаго преимущественно во второмъ и въ третьемъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, ибо употребленіе учебника при первоначальномъ обученіи невозможно, а въ первомъ и даже частью во второмъ классахъ—не всегда желательно. Для того, чтобы употребленіе учебника было возможно, необходимо имѣть дѣло съ учащимися, находящимися на болѣе высокой степени умственного развитія, чѣмъ на какой находятся всѣ учащіеся приготовительныхъ училищъ и многіе ученики перваго класса ср. уч. зав.

Прежде чѣмъ записаться ролью учебника въ классѣ и при домашнемъ обученіи, мы позволимъ себѣ вспомнить о той роли, которую учебникъ игралъ въ сравнительно недавнее время, когда учебникъ былъ фундаментомъ всего преподаванія.

Въ такъ называемое „доброе“ старое время, когда свѣтъ здравыхъ педагогическихъ идей еще не успѣлъ къ намъ проникнуть даже преломленнымъ чрезъ призму нашего часто рабскаго поклоненія всяческимъ иностраннымъ авторитетамъ, — въ „доброе“ старое время учебникъ ариметики игралъ ужасную роль мучителя малолѣтнихъ, не обладавшихъ огромною памятью, почти необходимою при тогдашнемъ преподаваніи для дословнаго усвоенія учебника паизустъ. Тогда всѣ предметы обученія усваивались паизустъ, а содержаніе учебника ариметики — и подавно. Вся разница между требованіями, предъявленными различными учителями въ то время, заключалась почти только въ *количество* „отмѣченнаго“, а отмѣчали подлежащее усвоенію въ данномъ (по большей части довольно краткомъ) учебникѣ — почти всѣ преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній. Пресловутое „отъ сихъ до сихъ поръ“, какъ это ни странно въ настоящее время, принадлежитъ къ числу тѣхъ фактовъ недавней сравнительно старины, которые, къ сожалѣнію, не могутъ подлежать ни малѣйшему сомнѣнію. Но съ проникновеніемъ нѣкоторыхъ лучей свѣта въ темное царство, которое въ то время представляли собою приемы *класснаго* преподаванія всѣхъ предметовъ среднеобразовательнаго курса, а курса ариметики въ особенности, — съ проникновеніемъ лучей свѣта въ это темное царство возникло и у преподавателей ариметики смутное сознаніе въ необходимости нѣкоторыхъ реформъ въ дѣлѣ обученія. Къ тому же времени относится почти не практиковавшееся дотолѣ объясненіе учителямъ всѣхъ или нѣкоторыхъ статей курса, чтеніе „лекцій“ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, а также дозволеніе учащимся отмѣчать урокъ такъ называемыми „своими словами“. Вскорѣ всяческіе учебники въ прежнемъ значеніи слова были почти совершенно дискредитованы, — въ особенности „сухіе“ и „казенные“, а таковыми въ то время были всѣ учебники. Составители тоже пошли на встрѣчу назрѣвшему недовольству „казенщиной“, и къ этому-то времени именно и относится появленіе въ свѣтъ всякаго рода руководствъ, болѣе самоучительнаго, чѣмъ учебнаго рода, а равно составленіе учителями подробнѣйшихъ, чаще всего весьма слабыхъ, „записокъ“ по своимъ предметамъ и также нѣкоторое, весьма отрадное въ основѣ своей, оживленіе учебной и педагогической литературы. Составители учебниковъ въ „новомъ“ духѣ постарались прежде всего освободиться отъ слога своихъ предшественниковъ и замѣнить всякія „ибо“, „сей“, „онъ“, „дабы“ и т. п. соответствующими имъ „литературными“ реченіями; кромѣ того, они позаботились о внесеніи въ учебники повѣствовательнаго элемента, отъ чего, по ихъ мнѣнію, учебникъ дѣлался будто бы доступнѣе дѣтскому пониманію.

Но при этомъ, воплѣ законномъ, стремленіи къ лучшей

постановкѣ дѣла обученія въ среднихъ и др. учебныхъ заведеніяхъ, къ сожалѣнію, забыто было одно, а именно, что вся сила здраваго въ педагогическомъ отношеніи преподаванія заключается вовсе не въ томъ, какимъ слогомъ (новымъ ли, или старымъ, „казеннымъ“) изложенъ учебникъ, а въ томъ—какъ именно ведется самое преподаваніе въ классѣ, т. е. въ томъ, учителъ ли *всѣ* классъ на урокахъ по данному предмету обученія, или же этому послѣднему учатся только наиболѣе способные и наиболѣе старательные ученики. При этомъ забыто было и то, что учебникъ, по самому существу своему, долженъ быть кратокъ и точенъ по изложенію и, вмѣстѣ, полонъ по содержанию, и что онъ можетъ играть только роль, такъ сказать, регулятора классныхъ занятій; что статьи учебника должны усавиваться учащимися послѣ того, какъ уже ими съ помощью учителя сознательно проработано въ классѣ содержаніе этой статьи; что учебникъ долженъ представлять собою только синтезъ всѣхъ ученій даннаго предмета, изложенныхъ въ немъ по возможности сжато и, если того требуетъ предметъ, то синтетически же. Этотъ взглядъ на сущность и цѣли учебника, къ сожалѣнію, и доселѣ усвоенъ не всѣми составителями многочисленныхъ учебныхъ руководствъ и пособій и не всѣми гг. преподавателями.

Коснувшись этого вопроса, мы наталкиваемся на одинъ изъ многихъ случаевъ, въ тысяча первый разъ доказывающихъ, что вопліи справедливыя протестъ противъ формы, въ которой проявляется та или другая дѣйствительная потребность школы, несправедливо распространяется и на самую эту потребность. Такое легко объяснимое, но ничѣмъ не оправдываемое распространеніе несочувствія формъ на самую сущность дѣла привело, какъ извѣстно, къ многимъ далеко не глубокомысленнымъ педагогическимъ системамъ, за которыми можно признать лишь ту заслугу, что онѣ были результатомъ желанія ихъ изобрѣтателей освободить человѣчество отъ несимпатичныхъ сторонъ и формъ современнаго имъ воспитанія и обученія. Дабы не слишкомъ отдалиться отъ ближайшаго предмета этой работы, напомнимъ читателю пресловутую методу „изученія“ чиселъ, которая создана, главнымъ образомъ, потому, что несочувствіе къ несимпатичнымъ приемамъ, практиковавшимся дотолѣ при обученіи дѣтей производству четырехъ дѣйствій надъ числами, было, безъ всякаго къ тому основанія, перенесено на самую сущность арифметики, т. е. на самыя арифметическія дѣйствія, которыя, конечно, ни въ чемъ чеповинны предъ тѣми или другими вопліи законными требованіями педагогики.

Прежде чѣмъ перейти къ вопросу о формѣ употребленія учебника арифметики, мы должны принять слѣдующія положенія, которыя въ доказательствахъ, надѣемся, не нуждаются:

1) Учебникъ арифметики долженъ быть полонъ по содержанию, точенъ и кратокъ по изложенію и во всѣхъ своихъ частяхъ, исполненъ согласенъ какъ съ научными данными, такъ и съ требованіями логики.

2) Подробнымъ разъясненіямъ различныхъ ученій въ учебникѣ поэтому не мѣсто; за-то тѣмъ умѣтнѣе они въ классѣ, при непосредственномъ воздѣйствіи учащаго на ума учащихся.

3) При классномъ преподаваніи долженъ работать весь классъ.

4) Классная проработка учебнаго матеріала должна отличаться ясностью и живостью понятій и представленій, возбуждаемыхъ и вырабатываемыхъ въ умахъ учащихся.

5) Регуляторомъ классной работы долженъ быть учебникъ, котораго руководящія идеи никогда не должны забываться учащимъ, дабы въостѣдствіи учебникъ могъ быть не только понятъ, но и исполненъ усвоенъ учащимися.

Усвоеніе же учащимися учебника не только должно быть въ большинствѣ случаевъ контролируемо учащимъ, но должно вестись подъ непосредственнымъ его руководствомъ. Ибо въ противномъ случаѣ все образовательное значеніе учебника сводится къ нулю, и учебникъ является только весьма мало подходящимъ учебнымъ пособіемъ для пропустившаго тотъ или иной урокъ учащагося. Къ сожалѣнію, въ настоящее время понятія объ учебникѣ, руководствѣ, самоучителѣ и курсѣ сильно смѣшались другъ съ другомъ, такъ что рѣдко дѣлаются рѣзкое разграниченіе между этими, строго говоря, различными понятіями: курсъ имѣетъ въ виду дѣла научныя, самоучитель—взрослаго читателя, руководство - учителя, а учебникъ—учащагося, и притомъ учащагося подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя. Безъ учителя учебникъ чаще приносить вредъ, чѣмъ пользу, разочаровывая учащагося въ его умственныхъ силахъ и внушая ему нелюбовь къ предмету.

Учебникъ не можетъ быть для учащагося I-го, II-го, III-го классовъ книгою для чтенія; читать учебникъ такъ, какъ мы читаемъ газету или романъ, воспитанники этихъ классовъ не въ состояніи, да и вообще кто *читаетъ* учебникъ, кромѣ лѣнь. вовсе не нуждающихся въ его матеріальномъ содержаніи, кромѣ тѣхъ, для кого онъ не есть собственно учебникъ? Разъ учебникъ не можетъ и не долженъ быть читаемъ, то ясно, что въ немъ умѣтно только лишь то, что подлежитъ непремѣнному усвоенію; хороши, истинно хороши, только тотъ учебникъ, изъ котораго нельзя вычеркнуть не только ни одной статьи, не только ни одного параграфа, но даже ни одной строки, ни одного слова, и къ которому также нельзя прибавить ни одного параграфа, ни одной строки и ни одного слова. Большинство же современныхъ учебниковъ, къ сожалѣнію, составлено такъ, какъ будто учащійся приступитъ къ ихъ чтенію безъ надлежащей классной подготовки и какъ

будто книга можетъ замѣнить учителя. Въ томъ-то и состоитъ одна изъ важнѣйшихъ, главнѣйшихъ, существеннѣйшихъ задачъ и одно изъ громаднѣхъ преимуществъ классныхъ занятій, что дѣти, послѣ основательной проработки въ классѣ какой-либо статьи курса, могутъ сознательно, толково, съ разумнѣемъ усвоить себѣ относящіеся къ этой статьѣ параграфы учебника, что всякое мѣсто, всякое слово учебника можетъ быть для нихъ не только понятно, но и необходимо, какъ резюме, какъ послѣдніе штрихи, какъ окончательная редакція уже равнѣ усвоенныхъ ими, но еще не приведенныхъ въ стройную и строгую систему, еще, такъ сказать, не окристаллизованныхъ знаній и умѣній.

Роль учебника и задача его заключаются именно въ приведеніи въ систему усвоенныхъ дѣтьми, подъ руководствомъ учителя и безъ помощи учебника, умѣній, познаній, понятій и логическихъ навыковъ. Что касается способа проработки курса по учебнику, то подробная о немъ рѣчь будетъ впереди, въ главѣ V-ой: здѣсь же умѣстно только замѣтить, что вообще учебникъ долженъ быть читаемъ не специально для того назначенныхъ урокахъ, въ классѣ, въ присутствіи и подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, при разъясненіяхъ со стороны читающаго, слушателей и, въ случаѣ надобности, самого учащаго. Но читать такимъ образомъ можно только тѣ статьи учебника, которыхъ матеріальное содержаніе дѣтьми усвоено вполне основательно и съ полнымъ разумнѣемъ. Цѣль же этого чтенія очевидна: она заключается въ приданіи равнѣ пріобрѣтеннымъ знаніямъ и умѣніямъ учащагося вполне законченной, логически строгой и архитектурноически прочной и изящной формы. При этомъ учебникъ не только долженъ быть читаемъ, но также изучаемъ, и текстъ его не только долженъ быть изученъ, но также совершенно усвоенъ учащимся. Если дѣло усвоенія учебника поставлено учащимъ надлежащимъ образомъ, то легко достигнуть того, чтобы многіе параграфы учебника были усвоены (не вы зубрены, а усвоены) учащимся почти слово-въ-слово. О важности такого усвоенія рѣчь будетъ впереди; здѣсь же умѣстно замѣтить, что въ дословномъ усвоеніи текста учебника не только нѣтъ ничего предосудительнаго, но даже ничего напоминающаго практиковавшееся въ старину долбленіе и зубреніе, если только курсъ построенъ надлежащимъ образомъ.

§ 3. Постараемся теперь объяснить—почему дѣтей слѣдуетъ прежде всего научить устному счету именно до двадцати включительно, а не до десяти, тридцати или иного какого предѣла. Имя числительныхъ имѣть укрупненнаго выше предѣла (отъ одного до двадцати включительно) только первые десять суть слова первообразныя (не производныя). Что же касается числительныхъ именъ отъ одиннадцати до двадцати включительно, то хотя ихъ этимологическое происхожденіе въ русскомъ языкѣ и подчиняется извѣстному единообразному закону, но однако слова „одиннадцать“, „двѣнадцать“ и т. д. до „девятнадцати“ включительно суть слова все-таки болѣе или менѣе новыя, и при томъ законъ образованія ихъ не имѣетъ ничего общаго, съ этимологической точки зрѣнія, съ закономъ образованія словъ, обозначающихъ числа большія девятинадцати. Въ русскомъ, да и во всѣхъ славянскихъ языкахъ, въ составъ именъ числительныхъ отъ одиннадцати до девятинадцати включительно входитъ предлогъ „на“, придающій словамъ этимъ довольно специфической характеръ, который долженъ быть усвоенъ учащимся, и игнорировать эту особенность сказанныхъ числительныхъ, конечно, не слѣдуетъ *). При усвоеніи этихъ числительныхъ именъ учащейся на первыхъ порахъ вовсе не обязанъ разбивать каждое изъ соответствующихъ даннымъ словамъ чиселъ на одинъ десятокъ и столько-то единицъ. Это знаніе должно явиться результатомъ дальнѣйшихъ занятій его, и этого результата вовсе не слѣдуетъ добиваться на занимающей насъ ступени обученія счету.

Существуетъ мнѣніе, будто знаніе однихъ только числительныхъ именъ въ ихъ натуральномъ порядкѣ не имѣетъ съ дидактической точки зрѣнія никакого значенія. Это мнѣніе далеко не основательно. Чисто словесное знаніе числительныхъ именъ, конечно, недостаточно для дальнѣйшаго прохожденія курса арифметики; но оно уже сильно облегчаетъ учителю переходъ отъ счета исключительно словеснаго, отъ болѣе или менѣе безсодержательнаго произнесенія дѣтьми числительныхъ именъ въ извѣстномъ

*) Впрочемъ, и въ другихъ европейскихъ языкахъ слова для обозначенія чиселъ отъ одиннадцати до девятинадцати включительно, болѣею частью суть слова болѣе или менѣе особенныя, не представляющія аналогіи ни съ письменнымъ обозначеніемъ соответствующихъ чиселъ помощью т. наз. арабскихъ цифръ, ни съ остальными именами числительными, обозначающими числа, большія девятинадцати. На исключеніяхъ здѣсь, конечно, не для чего останавливаться. Но зато на одной особенноти русскихъ числительныхъ именъ этой области чиселъ необходимо остановиться. Мы говоримъ о томъ, что въ то время, какъ въ словесныхъ обозначеніяхъ чиселъ большихъ двадцати названіе единицъ высшаго разряда предшествуетъ названію единицъ разряда низшаго, въ словахъ „одиннадцать, двѣнадцать“ и т. д. до „девятнадцати“ включительно названіе единицъ предшествуетъ названію десятковъ.

порядкѣ, къ счету вполне сознательному. Въ раннемъ дѣтствѣ ребенокъ научается произносить слова, не понимая первоначально ихъ значеній, и только впоследствии онъ научается связывать съ каждымъ словомъ болѣе или менѣе содержательное представление. То же справедливо и относительно числительныхъ именъ, и отрицать естественный ходъ развитія человеческого ума только потому, что онъ начинается съ бессознательнаго, было бы неблагодарно. Поэтому учащій, убѣдившись въ томъ, что дѣти обладаютъ умѣниемъ „механически“ считать, этимъ долженъ очень дорожить, такъ какъ это его освобождаетъ отъ очень трудной и черной работы усвоенія дѣтскими словъ. Если дѣти не знакомы съ механическимъ счетомъ, то ихъ надо научить уже прямо счету сознательному, сначала въ указанныхъ выше предѣлахъ. Въ обоихъ случаяхъ обязательно должно пользоваться наглядными пособиями: кубиками, спичками и болѣе или менѣе простыми значками, изображаемыми учителемъ на классной доскѣ, и въ случаѣ надобности—дѣтми въ тетрадяхъ или на грифельныхъ доскахъ.

Порядокъ упражненій въ устномъ счетѣ можетъ быть слѣдующій: при классномъ обученіи упражненія въ хоровомъ счетѣ знаковъ, изображаемыхъ учителемъ, упражненіе поочередно каждому изъ учащихъ въ счетѣ безъ участія остальныхъ, и упражненія въ обратномъ счетѣ; при одиночномъ же обученіи важнѣе всего упражненіе въ счетѣ какихъ либо предметовъ. Только относительно т. наз. обратнаго счета должно замѣтить слѣдующее. Обратный счетъ прежде всего вовсе не счетъ и сводится лишь къ названію числительныхъ именъ, начиная съ даннаго изъ нихъ, въ порядкѣ обратномъ натуральному. Къ обратному счету почти никогда не приходится прибѣгать, и вмѣсто него гораздо естественнѣе и съ гораздо большею выгодною можно прибѣгнуть къ дѣйствию вычитанія. Дѣйствительно, пусть у насъ на столѣ девять перьевъ и мы хотимъ узнать, сколько останется, если изъ нихъ возьмутъ напр. четыре штуки; никто не станетъ дѣлать этого помощью такъ называемаго обратнаго счета, ибо, прибѣгнувъ къ нему, мы должны не только произносить слова: „девять, восемь, семь“ и т. д., но въ то же время также и не упускать изъ виду числа отдѣленныхъ предметовъ, что сдѣлать въ одно и то же время не только трудно, но при большомъ количествѣ отсчитываемыхъ предметовъ даже и невозможно. Единственный случай, когда обратный счетъ можетъ оказать услугу, это случай, когда, зная какое число какого мѣсяца сегодня, требуется опредѣлить—какое число было, напр., въ среду, въ четвергъ или другой какой день на прошлой недѣлѣ. Но услуга эта именно и доказываетъ, что процессъ, называемый обратнымъ счетомъ, на самомъ дѣлѣ не есть какой либо видъ дѣйствительнаго, т. наз. прямого, счета, а лишь процессъ чисто словесный. Таковымъ

опять долженъ быть также и при обученіи счету: упражненія въ называніи числительныхъ именъ въ порядкѣ обратномъ ихъ натуральной послѣдовательности могутъ служить либо для провѣрки — насколько усвоены числительныя имена, либо же для упражненія ихъ въ этомъ именно направленіи.

Должно замѣтить, что при упражненіи дѣтей въ счетъ иногда можно задавать задачи на сложеніе съ тѣмъ, чтобы дѣти рѣшали ихъ непосредственнымъ счетомъ. Но при этомъ должно брать числа болѣе или менѣе крупныя, совершенно игнорируя способы сложения, какъ таковыя. Кроме того, не должно забывать, что фабула задачъ этого рода должна быть абсолютно проста и не должна заключать ни условныхъ выраженій, ни какихъ либо аналитическихъ требованій. Въ особенности дозволительно обращаться къ задачамъ при домашнемъ обученіи, гдѣ гораздо болѣе просторъ можетъ быть отведенъ употребленію наглядныхъ пособій и инструментальному счету.

Но не должно при этомъ забывать, что цѣлью всѣхъ подобныхъ упражненій должно быть исключительно усвоеніе дѣтьми процесса счета, а не какого либо иного умѣнія.

Есть еще одинъ видъ упражненія въ счетъ, состоящій въ томъ, что дѣтямъ предлагается рядъ задачъ слѣдующаго типа: „въ комнатѣ было 8 человекъ; потомъ пришелъ еще одинъ; затѣмъ еще одинъ, да еще одинъ. Сколько послѣ этого стало человекъ въ комнатѣ?“ Упражненія этого рода не заслуживаютъ сочувствія по двумъ причинамъ: 1) это — упражненія въ приращеніи единицъ, и 2) эти упражненія крайне однообразны, скучны и въ стилстическомъ отношеніи не совершенно безупречны и не довольно естественны. Учитель долженъ упражнять дѣтей на занимающей насъ ступени, повторяемъ, только въ счетъ, стараясь по возможности разнообразить эти упражненія. Вводить повѣствовательный элементъ въ эти упражненія не слѣдуетъ еще и потому, что практическая жизнь предлагаетъ задачи счета вовсе не въ повѣствовательной формѣ. Если бы на это замѣтили, что повѣствовательный элементъ служить дѣлу развитію въ дѣтихъ умѣнія владѣть рѣчью, то на это можно возразить, что учителю и безъ этихъ задачъ вполне возможно развивать рѣчь ребенка на каждой ступени курса вообще и на интересующей насъ въ частности. Естественность и простота — вотъ тѣ требованія, которыхъ не имѣетъ права забывать учитель на всѣхъ ступеняхъ обученія, а задачи съ условіями для упражненія въ счетъ, конечно, не удовлетворяютъ этимъ требованіямъ.

§ 4. Когда устный счетъ дѣтьми болѣе или менѣе основательно усвоенъ, учитель можетъ приступить къ ознакомленію ихъ съ такъ называемыми арабскими цифрами. Длинныхъ разговоровъ о цѣли обозначенія чиселъ цифрами, конечно, вести не слѣдуетъ:

дѣти очень легко усваиваютъ себѣ значеніе записи и пользу установленія условнаго знака для обозначенія числа. Только при домашнемъ обученіи, гдѣ учащій находится съ учащимся, такъ сказать, съ глазу на глазъ и гораздо свободнѣе въ выборѣ пріемовъ, можно позволить себѣ нѣкоторое разъясненіе пользы общепотребительныхъ знаковъ для обозначенія однихъ и тѣхъ же чиселъ: въ классѣ же это разъясненіе въ большинствѣ случаевъ пропадетъ безъ всякой пользы для дѣля. Ибо дѣти и безъ разъясненій понимаютъ (такъ сказать, инстинктивно) возможность и пользу общепринятыхъ обозначеній. Опасеніе, что ребенокъ станетъ смѣшивать число съ цифрою тоже не основательно, если онъ ранѣе упражнялся въ дѣйствительномъ счетѣ предметовъ; поэтому на этой ступени ознакомленіе дѣтей съ цифрами не можетъ считаться преждевременнымъ.

Порядокъ ознакомленія съ цифрами можетъ быть избранъ слѣдующій: сначала могутъ быть дѣтямъ показаны три цифры: 1, 2 и 3, и объяснено ихъ условное значеніе, потомъ еще двѣ цифры: 4 и 5, и такъ далѣе до цифры 9 включительно. При этомъ можно упражнять дѣтей прежде всего въ хорошомъ и одиночномъ *называніи* цифръ, изображаемыхъ учителемъ на доскѣ. Когда такимъ образомъ дѣти научились отличать одну отъ другой первыя три цифры, изображаемыя на доскѣ учителемъ по порядку и въ разбивку, они могутъ перейти уже и къ изображенію цифръ подѣйствительномъ наблюденіемъ учителя, при чемъ цифру 1 должно изображать въ два такта (сначала тонкую черту снизу вверхъ, а потомъ толстую — сверху внизъ), цифру 2—въ два, а цифру 3—въ три такта (третій тактъ приходится на точку, которою заканчивается тонкій поворотъ вверхъ этой цифры). Убѣдившись въ томъ, что каждый изъ учащихся въ отдѣльности умѣетъ изображать каждую изъ этихъ трехъ цифръ, учитель можетъ задать дѣтямъ упражненіе въ обозначеніи цифрами числа значковъ разныхъ числовыхъ фигуръ, числа буквъ въ разныхъ словахъ, и т. п.

Ознакомленіе учащихся съ остальными цифрами и соответствующія самостоятельныя упражненія должны идти въ томъ же порядкѣ, при чемъ дѣтей надо приучить къ изображенію цифръ 4 и 9 въ три пріема, цифры 5 и 7—въ четыре пріема, цифръ 6 и 8 — въ два пріема. (Въ ч. I нашего „Методическаго Сборника арифметическихъ задачъ для среднихъ учебныхъ заведеній“ подѣ №№ 1—10 указаны упражненія, уместныя на этой ступени первоначальнаго курса *).

*) Ниже мы для краткости все ссылки на обѣ части нашего „Методическаго Сборника“ будемъ дѣлать въ скобкахъ, причемъ рим. оубъ цифрой будемъ обозначать часть Сборника, а арабскими—упражненія.

§ 5. Ознакомленіе съ обозначеніемъ десятка должно быть отнесено къ числу затруднительнѣйшихъ статей курса; удобнѣе перейти отъ цифръ прямо къ простѣйшему случаю сложения чиселъ, представляемому задачами, требующими несомнѣннаго даже и для ребенка присоединенія, прибавленія къ данному числу, не большому восьми, одной единицы. (I. 11—20). Объ „увеличеніи“ даннаго числа на одну единицу не можетъ быть рѣчи въ такихъ задачахъ; ихъ фабула (словесное содержаніе) въ общемъ видѣ не должна выходить за рамки слѣдующей схемы: „дапо a предметовъ; присоединенъ еще одинъ; сколько получилось?“ Было бы ошибочно вмѣстѣ съ нѣкоторыми авторами считать задачу этого рода задачей исключительно на счетъ. Она, конечно, можетъ быть рѣшена, какъ мы это видѣли выше, помощью счета и дѣти имѣютъ право ихъ рѣшать такимъ именно образомъ; но въ очень скоромъ времени они сами оставляютъ этотъ примитивный пріемъ и прибѣгаютъ къ причеситыванію. Пусть предложена задача: „Вотъ лежатъ три спички; вотъ еще одна; сколько здѣсь всего спичекъ?“ Только очень неразвитой ребенокъ семи-восьмилѣтъ начнетъ счетъ съ начала, съ единицы; большинство же дѣтей этого возраста прямо отвѣтитъ: „четыре“, т. е. предпочтетъ *при-считываніе* и такимъ образомъ, самъ того не сознавая, произведетъ сложеніе, опустивъ процессъ счета, результатомъ котораго тоже можетъ явиться данное число. Есть глубокая разница между требованіемъ „сосчитать — сколько здѣсь всего предметовъ“ и требованіемъ, которое выражается задачей, подобною вышеприведенной, такъ какъ въ послѣдней даны уже *извѣстные* числа. Лучше всего задачи этого типа предлагать на наглядныхъ пособіяхъ. Но если бы учащій захотѣлъ новести эти упражненія непременно на задачахъ съ условіями, то онъ таковыя всегда можетъ придумать и самъ.

На этой же ступени курса вполне умѣстно ознакомленіе со знакомъ сложения, при чемъ дѣтямъ учитель долженъ выяснитъ, что если дано число, напр. 4, и еще одна единица и требуется узнать—сколько у насъ всего единицъ, то это изображаютъ такъ: $4 + 1$, а изображенное можно прочесть такъ: „четыре да одинъ“. Въ то же время умѣстно ознакомить дѣтей со знакомъ равенства, который отдѣляетъ записъ отъ числа, получаемаго въ концѣ концовъ. Имъ должно выяснитъ смыслъ записи:

$$4 + 1 = 5,$$

а равно должно и научить ихъ читать подобныя записи такъ: „четыре да одинъ составляетъ пять“. (I, 21—24).

Должно замѣтитъ, что на этой ступени было бы преждевременно выясненіе учащимся закона, по которому

$$a + 1 = 1 + a,$$

такъ какъ прибавленіе нѣсколькихъ единицъ, хотя бы даже и

къ единицѣ, для дѣтей на этой ступени обученія представляеть уже нѣкоторыя, не соответствующія, можетъ быть, ихъ развитію, трудности. Поэтому умѣстно, для внесенія разнообразія въ занятія дѣтей, ознакомить ихъ съ простѣйшимъ случаемъ вычитанія одной единицы изъ однозначнаго числа. (I, 11—20). При этомъ задачи должны быть сначала задаваемы на наглядныхъ пособіяхъ; можно ввести также и задачи съ повѣствовательнымъ элементомъ, съ фабулою; но должно при этомъ помнить, что на этой ступени умѣстны только задачи простѣйшаго типа: „было столько-то единицъ; отнята, отдѣлена, удалена одна единица; сколько осталось?“ Тутъ же умѣстно ознакомленіе со знакомъ вычитанія и со способомъ чтенія записи

$$4 - 1 = 3.$$

Лучше всего читать эту записъ такъ: „четыре безъ единицы составляетъ три“ *). (I, 25—30).

§ 6. Ознакомивъ дѣтей съ указанными выше простѣйшими случаями сложенія и вычитанія, учащій можетъ перейти къ обозначенію чиселъ большихъ девяти помощью цифръ. Цифра нуль, а главное ея роль при изображеніи чиселъ, можетъ быть на первыхъ порахъ совершенно игнорируема. Прежде всего дѣтямъ должно быть выяснено, что для обозначенія различныхъ чиселъ придумывалъ все новыя и новыя знаки, все новыя цифры, было бы прежде всего неудобно, такъ какъ цифръ въ такомъ случаѣ набралось бы слишкомъ много. Игнорируя до поры до времени цифру нуль, учитель долженъ привести дѣтей къ сознанию, что они не умѣютъ обозначать десяти единицъ. Когда они вполне сознають свое неумѣніе, онъ, обративъ и постоянно обращая вниманіе на то, что число десять онъ умывленно пропускаеть, долженъ научить ихъ помощью цифръ обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, неутомимо выясняя на примѣрахъ и упражненіяхъ правила постановки единицы, т. е. цифры десятковъ, ранѣе цифры единицъ и констатируя, что десяти дѣти изображать еще не умѣютъ. Эта ступень курса пре-

*) Въ то время какъ у французовъ, нѣмцевъ и др. народовъ формулы вида $a \pm b$ и $a - b$ читаются такъ, что вмѣсто знака сложенія или вычитанія произносится соответствующее слово родного языка (plus, moins, mehr, weniger и т. д.), у русскихъ установилась, къ сожалѣнію, привычка читать эти формулы прибѣгая къ латинскимъ словамъ „плюсъ“ и „минусъ“. Не стремясь къ искорененію этой привычки, думаемъ однако, что на интересующихъ насъ ступеняхъ обученія было бы нецѣлесообразно знакомить дѣтей съ этими названіями, ничто не говорящимъ ни уму ихъ, ни воображенію. Слѣдуетъ также думать, что вышеуказанные способы чтенія формулъ и употребленіе слова „составляетъ“ въ третьемъ лицѣ единственаго, а не множественнаго числа, можно считать вполне правильными.

одолевается дѣтьми не особенно быстро, но при нѣкоторой настойчивости вскорѣ результаты непременно будутъ достигнуты.

Съ этою цѣлью учащій долженъ научить дѣтей разложенію каждаго изъ чиселъ этой области на десятокъ и нѣсколько единицъ. Если умѣніе счета усвоено дѣтьми какъ слѣдуетъ, то, съ помощью наглядныхъ пособій и пользуясь этимологическимъ составомъ числительныхъ именъ занимающей насъ области чиселъ, возможно въ какихъ-нибудь два, три, много четыре урока научить дѣтей устному разложенію чиселъ этой области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ. Когда это достигнуто, можно перейти къ обозначенію ихъ помощью цифръ и къ выясненію значенія мѣста, занимаемаго единицею въ этомъ случаѣ. Наконецъ, когда дѣти научились безошибочно обозначать числа отъ одиннадцати до девятнадцати включительно, тогда можно перейти къ цифрѣ нуль, къ обозначенію—сначала десяти, а потомъ и двадцати съ помощью этой крайне важной цифры. Только такимъ образомъ въ учащихся развивается привычка разлагать число сказанной области на одинъ десятокъ и нѣсколько единицъ и смотрѣть на число большее десяти съ точки зрѣнія десятичной системы, — привычка въ высшей степени важная, какъ въ развивательномъ отношеніи, такъ и для будущихъ занятій дѣтей ариѳметикою. (I, 31—55).

Не для чего, конечно, разъяснять, что упражненія въ разложеніи чиселъ занимающей насъ области на сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, и въ сложеніи двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое равно десяти, — что эти упражненія на данной ступени обученія могутъ быть только изустными, но никакъ не письменными. Дѣло въ томъ, что дѣти на этой ступени обученія еще не успѣли распространить пріобрѣтеннаго ими понятія о сложеніи на случай, когда второе слагаемое больше единицы. Коротче сказать: на этой (четвертой) ступени неумѣстны упражненія вида

$$14 = 10 + 4, 15 = 10 + 5 \text{ и т. д.}$$

и вида: $10 + 4 = 14, 10 + 5 = 15 \text{ и т. д.}$

За-то тѣмъ умѣстнѣе упражненія вида:

$$10 + 1 = 11, 11 + 1 = 12 \text{ и т. д.}$$

и вида: $11 - 1 = 10, 12 - 1 = 11 \text{ и т. д.}$

На эти послѣднія упражненія (I, 46—55), впрочемъ, отнюдь не слѣдуетъ смотрѣть какъ на упражненія въ *письменномъ производствѣ* дѣйствій сложенія и вычитанія, а только какъ на работы, преслѣдующія усвоеніе нумераціи чиселъ первыхъ двухъ десятковъ.

Было бы ошибочно думать, что упражненія въ сложеніи десятица съ одною единицею и въ вычитаніи одной единицы

изъ числа большаго десяти и меньшаго двадцати является на этой ступени курса преждевременнымъ потому, что они будто бы требуютъ знанія частно также тѣхъ правилъ сложения и вычитанія, по которымъ единицы складываются съ единицами и вычитаются изъ единицъ и т. д. Приложение этого пункта общихъ правилъ къ частнымъ случаямъ вышеуказаннаго рода, конечно, возможно; но знаніе правилъ вовсе не необходимо для сложения одного десятка съ единицею и для вычитанія одной единицы изъ даннаго числа: для возможности этихъ дѣйствій достаточно, если учащійся умѣетъ считать, понимаетъ сущность нумераціи и усвоилъ себѣ понятія сложения и вычитанія, когда второе слагаемое и вычитаемое равно единицѣ.

§ 7. По усвоеніи дѣтьми вышенамѣченныхъ умѣній можно приступить къ выработкѣ у нихъ понятія о дѣйствіи сложения всякихъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ не больше десяти. До сихъ поръ дѣти прибавляли къ числу только одну единицу; на этой (I, 56—70) ступени обученія ихъ надо приучить къ мысли, что есть случаи, когда требуется прибавить и больше одной единицы. Для этого могутъ быть предложены соотвѣтствующія задачи на наглядныхъ пособіяхъ и задачи съ повѣствовательнымъ элементомъ, фабула которыхъ не сложна, впрочемъ, выходить за предѣлы простѣйшаго случая сложения: „дано a единицъ, прибавлено, присоединено еще b единицъ; сколько послѣ этого получилось всего единицъ?“ Когда дѣти поймутъ смыслъ требованія подобныхъ задачъ и научатся на наглядныхъ пособіяхъ (лучше всего на пальцахъ) причесывать единицы втораго слагаемаго къ первому, они въ состояніи будутъ также понять пользу заоминанія *наизусть* результатовъ, къ упражненію въ которомъ учитель и можетъ въ такомъ случаѣ приступить на своихъ урокахъ съ учащимися. Но, повторяемъ еще разъ, прежде чѣмъ перейти къ этимъ упражненіямъ, должно убѣдиться въ томъ, всѣ ли учащіяся вполне поняли, какой смыслъ имѣютъ вопросы: „сколько будетъ три да два“, „четыре да два“, „пять да два“, „три да три“, „четыре да три“ и т. д. Только въ случаѣ, если они вполне ясно понимаютъ смыслъ подобныхъ вопросовъ, можно приступить къ заучиванію хоромъ наизусть таблицъ сложения чиселъ, сумма которыхъ не болѣе девяти. Что же касается задачъ на сложение чиселъ, сумма коихъ равна десяти, то въ нихъ дѣти должны обратить особенное вниманіе на новую единицу счета, такъ какъ десятокъ играетъ въ нумераціи и въ производствѣ дѣйствій надъ двужначными числами такую роль, какой остальные числа перваго десятка не играютъ. Поэтому упражненія въ сложении двухъ чиселъ, сумма которыхъ равна десяти, должны принадлежать къ числу тѣхъ усныхъ и письменныхъ упражненій, на которыя учащій долженъ обратить особенное вниманіе. Эти

упражнений могутъ отличаться отвѣченными характеромъ. На этой же ступени учитель долженъ довести учащихся до яснаго пониманія перемѣстительнаго закона, по которому сумма двухъ слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка ихъ. (I, 65—70).

§ 8. Далѣе должна быть дѣтми понята необходимость вычитанія одного однозначнаго числа изъ другого. Для этой цѣли особенно пригодны соответствующія упражненія на наглядныхъ пособияхъ, — упражненія, цѣль которыхъ только выясненіе *необходимости* дѣйствія вычитанія при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ. Фабула задачъ (I, 91—100) и упражненій этого рода не должна выходить за предѣлы требованія: „отдѣлить нѣсколько единицъ отъ даннаго числа ихъ“. Распространеніе понятія о вычитаніи одной единицы изъ даннаго числа ихъ на случай, когда требуется изъ числа вычесть болѣе одной единицы, для учащихся не представлятъ особенныхъ трудностей. При этомъ было бы преждевременно на этой ступени обученія связывать понятія вычитанія съ понятіемъ сложенія: это можетъ быть сдѣлано только впоследствии. Преждевременнымъ точное формулированіе сказанной связи вычитанія со сложеніемъ признаемъ на этой ступени потому, что семи- или восьмилѣтніи дѣти съ большимъ трудомъ усвоятъ себѣ, что задачи типа „сколько надо прибавить единицъ къ a , чтобы получить b “ и „къ какому числу надо прибавить a , чтобы получить b “ ведутъ къ *вычитанію* одного числа изъ другого, а не къ сложенію.

Усвоеніе дѣтми таблицы вычитанія наизусть должно вестись методически-последовательно, начиная съ случая вычитанія, когда вычитаемое равно единицѣ, и переходя постепенно къ случаямъ вычитанія, когда вычитаемое равно двумъ, тремъ и т. д.; уменьшаемое на этой, шестой, ступени, конечно, не должно быть болѣе десяти. Но приступать къ усвоенію наизусть этой части таблицы вычитанія слѣдуетъ только въ томъ случаѣ, когда учащій вполне убѣжденъ въ томъ, что дѣти понимаютъ не только цѣль дѣйствія вычитанія, но также необходимость и пользу запомнанія результатовъ вычитанія однихъ чиселъ изъ другихъ. Въ противномъ случаѣ заучиваніе, хотя бы даже и хоромъ, этой части таблицы вычитанія будетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ ненужнымъ насиліемъ надъ дѣтскою природою.

§ 9. Прежде чѣмъ перейти къ сложенію чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, должно приучить дѣтей къ сложенію одного десятка съ нѣсколькими единицами, не составляющими десятка, и къ разложенію чиселъ отъ одинадцати до девятнадцати включительно на сумму одного десятка съ нѣкоторымъ однозначнымъ числомъ единицъ. (I, 111—155). На слѣдующей ступени можно приступить къ сложенію двухъ однозначныхъ чиселъ, дающему въ суммѣ также менѣе двадцати. Прежде всего

должно убѣдить дѣтей, что сложение такихъ чиселъ иногда требуется; съ ними это можетъ быть проработано сначала на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ на задачахъ. Когда они убѣдились въ возможности такихъ задачъ и поняли смыслъ ихъ, они поймутъ, во 1-хъ, самую сущность процесса сложения въ этомъ случаѣ, состоящую въ томъ, что сумма однихъ слагаемыхъ, напр., 6 и 7, сводится къ суммѣ другихъ: 10 и 3, и во 2-хъ, необходимость запомнить *наизусть* суммы, происходящія отъ сложения двухъ однозначныхъ чиселъ.

Сущность процесса сложения двухъ однозначныхъ чиселъ, сумма которыхъ больше десяти, какъ выше замѣчено, состоитъ въ томъ, что каждая такая сумма двухъ слагаемыхъ замѣняется суммой другихъ двухъ слагаемыхъ, изъ коихъ одно равно десяти. Такъ, напр., если дано сложить 7 и 8, то, отбавивъ отъ 8-ми единицъ три и прибавивъ къ 7-ми эти три единицы, мы получимъ $10 + 5$ или 15. Дѣти должны вполне овладѣть этимъ приемомъ, прежде чѣмъ перейти къ заучиванію, подъ руководствомъ учителя, остальной, имъ еще неизвѣстной, части таблицы сложения. (I. 156—165 и 166—177). При усвоении указанного приема дѣти впервые пользуются сочетательнымъ закономъ сложения, и если этого и не слѣдуетъ разъяснять учащемуся, то самъ учитель о томъ не долженъ забывать ни въ какомъ случаѣ. *)

Считаемъ необходимымъ замѣтить, что упражненія въ такомъ сложении числа, большаго десяти и меньшаго двадцати, съ однозначнымъ числомъ, которое (сложение) даетъ въ суммѣ число меньшее двадцати, не преждевременны на этой ступени обученія, хотя они и могутъ быть разсматриваемы съ точки зрѣнія примѣненія къ нимъ общаго правила сложения многозначныхъ чиселъ. Въ такой же мѣрѣ нельзя считать преждевременными упражненія въ вычитаніи изъ двузначнаго числа, меньшаго двадцати (вида $10 + a$), всякаго однозначнаго числа. Откладывать сознательное изученіе таблицы сложения и вычитанія до ознакомленія дѣтей съ правилами этихъ дѣйствій невозможно, а сознательное изученіе этихъ таблицъ безъ упражненій, о которыхъ идетъ рѣчь, тоже невозможно. Это разъ. А во вторыхъ—ненормальнымъ должно считать такую постановку дѣла, при которой учащійся не въ состояніи, не пользуясь „правилами“, выполнить дѣйствія вычитанія въ случаѣ $12 - 5$, или, что еще хуже того, дѣйствій сложения и вычитанія въ случаяхъ: $12 + 3$ или $19 - 7$ и т. п. (I, 201—220).

*) Въ обѣихъ частяхъ нашего „Методическаго Сборника“ встрѣчается много задачъ, въ которыхъ какое-либо слово или выраженіе набрано курсивомъ. Эти выраженія либо принадлежатъ къ числу терминовъ, либо же отмѣчены такимъ образомъ для того, чтобы на нихъ обратить вниманіе учащихся.

§ 10. На слѣдующей ступени обученія было бы естественно перейти къ нумераціи чиселъ большихъ двадцати и къ производству дѣйствій сложенія и вычитанія надъ многозначными числами. Но такимъ образомъ въ обученіе ариметикѣ было бы внесено чрезвычайное и весьма вредное въ педагогическомъ отношеніи однообразіе. Во избѣжаніе этого, на этой же ступени курса надо ввести какіе-либо новые элементы и таковымъ является понятіе объ умноженіи. Но прежде чѣмъ перейти къ умноженію дѣти должны усвоить себѣ возможность и смыслъ сложенія нѣсколькихъ дѣлѣхъ чиселъ; ибо умноженіе является на первыхъ порахъ только частнымъ случаемъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ,—частнымъ случаемъ, въ которомъ мы, пользуясь *таблицею* умноженія, можемъ находить результаты сложенія равныхъ слагаемыхъ, на самомъ дѣлѣ вовсе не производя этого послѣдняго дѣйствія. Итакъ, въ виду чисто педагогическихъ соображеній, на этой ступени обученія умѣстны не только нумерація двузначныхъ чиселъ (I, 221—230), но и введеніе въ курсъ сложенія нѣсколькихъ слагаемыхъ и умноженія такихъ чиселъ, произведеніе которыхъ не болѣе 20-ти.

До выясненія нумераціи всякихъ двузначныхъ чиселъ слѣдуетъ удостовѣриться—умѣютъ ли дѣти безошибочно считать до ста и понимаютъ ли они законъ этого чисто-словеснаго процесса. Но во всякомъ случаѣ ихъ надо пріучить къ разложенію всякаго двузначнаго числа на десятки и единицы, и обратно: къ соединенію всякаго однозначнаго числа десятковъ съ однозначнымъ числомъ единицъ въ одно число. При этомъ въ качествѣ нагляднаго пособія могутъ служить: при классномъ обученіи кубики и спички, а при одиночномъ—предпочтительно спички („солома“). Дѣло въ томъ, что спички, принадлежа вообще къ числу наилучшихъ наглядныхъ пособій, въ классѣ не особенно удобны, если они не довольно крупны. Что же касается кубиковъ такъ наз. ариметическаго ящика, то только они (но не столбики) должны быть употребляемы при обученіи. Когда устная нумерація усвоена, можно приступить къ письменной, которая тогда не затруднительна для учащихся, если они усвоили себѣ десятичный взглядъ на всякое двузначное число. (I, 221—230). *)

*) Особенныхъ трудностей здѣсь не представляется, хотя значительнаго единообразія въ русскихъ числительныхъ именахъ, обозначающихъ нѣсколько десятковъ, не замѣчается: этимологическое сходство одного рода есть въ словахъ „двадцать“ и „тридцать“, и сходство совсѣмъ другого рода—въ словахъ „пятьдесятъ“, „шестьдесятъ“, „семьдесятъ“ и „восемьдесятъ“; слова же „сорокъ“ и „девяносто“ являются элементами совершенно чуждыми семьѣ остальныхъ именъ числительныхъ. Несмотря однако на это, дѣти очень быстро усваиваютъ себѣ понятіе о счетѣ десятками, т. е. о смыслѣ чепырехъ и т. д. десятковъ, а равно легко усваиваютъ себѣ слова: „двадцать“, „тридцать“ и т. д., такъ какъ эти сло-

Что касается сложения нѣсколькихъ, вообще не равныхъ между собою слагаемыхъ, то необходимость этого дѣйствія дѣти могутъ уяснить себѣ при помощи наглядныхъ пособій и приличныхъ задачъ съ условіями. (I. 231—240). Прежде всего они должны уяснить себѣ, что для производства дѣйствія можно первое слагаемое сложить со вторымъ, а полученную сумму—съ третьимъ и т. д. На этой же ступени должно быть выяснено употребленіе знака плюсъ въ случаѣ сложения нѣсколькихъ слагаемыхъ, если это ранѣе (I. 178—185) не было выяснено.

Что касается умноженія, то вначалѣ это дѣйствіе должно быть для учащихся только специальнымъ *частнымъ* случаемъ сложения, а запись умноженія—*сокращенною* записью сложения. Мы подчеркнули слова „частнымъ“ и „сокращенною“ для того, чтобы напомнить читателю, что не самое дѣйствіе умноженія есть сокращенное (какъ это нѣкоторые утверждаютъ) сложеніе, а что только запись $5 + 5 + 5 + 5$ замѣняется болѣе короткою записью 5×4 и что для возникновенія понятія объ умноженіи недостаточно одного лишь равенства слагаемыхъ: для этого необходимо еще нѣкоторая специальная идея и существованіе таблицы умноженія. Засимъ должно приучать дѣтей къ записыванію ранѣе всего слагаемаго, потомъ знака умноженія, и наконецъ—числа равныхъ слагаемыхъ. (I, 251—275). Запись $5 \times 4 =$ ученикамъ должна быть читаема такъ: „пять, умноженное на четыре, составляетъ“. Должно строго соблюдать, чтобы дѣти приучились число, изображаемое ранѣе знака умноженія, всегда принимать за множителя, а число, стоящее послѣ знака—за множимое, по отношенію не обратнo. Поэтому запиши:

$$2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5$$

ва имъ вовсе не незнакома и часто употребляется въ рѣчи всѣми окружающими. Но должно замѣтить, что въ то время какъ при усвоеніи дѣтими уснаго счисленія отъ одного до девятнадцати включительно обязательно должны быть усвоены прежде всего самыя имена числительныя (т. е. слова), а потомъ уже нумерация, дѣти при изученіи нумерации отъ двадцати до ста могутъ идти также и путемъ *обратнымъ*, т. е. сначала усвоить себѣ счетъ десятками и даже письменное обозначеніе двузначныхъ чиселъ помощью арабскихъ цифръ, а потомъ уже перейти къ усвоенію словъ „двадцать“, „тридцать“ и т. д. Этотъ послѣдній путь не только сокращаетъ трудъ по усвоенію нумерации на ряду съ усвоеніемъ счисленіемъ, не только удобнѣе въ чисто практическомъ отношеніи, но иногда целесообразнѣе и въ развивательномъ, въ особенности при обученіи домашнимъ. Дѣло въ томъ, что механическое названіе именъ числительныхъ въ натуральномъ порядкѣ, начиная съ двадцати (двадцать одинъ, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре и т. д.) чрезвычайно утомительно и весьма мало говоритъ дѣтскому уму и воображенію. Небезопасно поэтому научить дѣтей (какъ это нѣкогорые и дѣлаютъ) счету въ слѣдующей формѣ: одинъ, два, три... десять; одинъ, два, три... восемь, девять, двадцать; одинъ, два, три... восемь, девять, тридцать; одинъ, два, три... восемь, девять, сорокъ; и т. д.

и т. д. должно читать не „дважды три“, „дважды четыре“, „дважды пять“, а попеременно такъ: „два, помноженное на три“, „два, помноженное на четыре“ и т. д. Съ реченіями же „дважды“, „трижды“, „четырежды“, „пятью два“, „пятью три“, „шестью два“ и т. д. дѣти должны быть ознакомлены позже, при чемъ они должны значеніе этихъ реченій усвоить себѣ вполне точно. Ихъ должно поэтому приучить обозначать помощью цифръ реченія „пятью два“, „пятью три“ и т. п. слѣдующимъ образомъ:

$$2 \times 5, \quad 3 \times 5 \text{ и т. д.}$$

Должно замѣтить, что ранѣе чѣмъ приступать къ заучиванію назвустъ таблицы умноженія чиселъ, произведеніе которыхъ менѣе двадцати, учащіеся должны убѣдиться въ пользѣ и необходимости знанія этой таблицы при разрѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ.

Въ фабулу задачъ и упражненій, прорабатываемыхъ учениками при непосредственной помощи учителя, на этой ступени не должно входить ни увеличеніе числа въ нѣсколько разъ, ни другія условныя выраженія, за исключеніемъ реченій: „дважды“, „трижды“ и т. д.

На этой ступени обученія изобиліе успешныхъ упражненій представляетъ собою необходимое условіе усвоенія всѣхъ ея элементовъ: учащій неумолимо долженъ упражнять въ быстромъ усномъ сложеніи, вычитаніи и умноженіи небольшихъ отвлеченныхъ чиселъ.

§ 11. Слѣдующую ступень курса составляютъ ученія о сложеніи и вычитаніи двузначныхъ чиселъ и объ умноженіи въ предѣлахъ всей таблицы умноженія. Здѣсь упражненія должны отличаться особенною систематичностью. Задачъ, которыя должны бы убѣдить учащихся въ необходимости сложенія и вычитанія двузначныхъ чиселъ, а равно умноженія чиселъ, произведеніе коихъ болѣе двадцати, на этой ступени, строго говоря, не надо: дѣти вполне уяснили себѣ на предыдущихъ урокахъ необходимость, логическій смыслъ и цѣль этихъ дѣйствій. За-то тѣмъ тщательнѣе статьи о сложеніи и вычитаніи должны быть проведены на наглядныхъ пособіяхъ, пользуясь каковыми только и возможно выяснитъ сущность „правилъ“ сложенія и вычитанія, сводящихся къ дѣйствіямъ надъ разрядными числами, т. е. сначала надъ единицами и потомъ—надъ десятками, или сначала надъ десятками, а потомъ—надъ единицами.

Въ высшей степени полезны на этой ступени упражненія въ сложеніи и вычитаніи, на счетахъ и на „снѣчкахъ“. Если учащій не желаетъ, чтобы дѣти усвоили себѣ только механическую сторону дѣйствій, въ скоромъ времени совершенно разучились съ полнымъ разумѣніемъ совершать эти дѣйствія, то онъ обязательно долженъ обратиться къ сказаннымъ нагляднымъ пособіямъ. Къ сожалѣнію, необходимость раздробленія въ нѣкоторыхъ слѣ-

чаихъ одного десятка въ единицы при вычитаніи наиболѣе цѣлесообразно выясняется на свичкахъ. каковое пособіе, какъ это замѣчено выше, при классномъ обученіи не всегда удобно. Это, впрочемъ, нисколько не должно смущать учащаго: со своей стороны онъ долженъ сдѣлать все для нагляднаго усвоенія дѣтymi идеи сложения и вычитанія двузначныхъ чиселъ. Трудъ, имъ на это потраченный, будетъ вознагражденъ сторицею при дальнѣйшемъ прохожденіи курса.

При усвоеніи дѣтymi таблицы умноженія замѣчаются двѣ трудности: одна состоитъ въ трудности усвоенія ея памятью, а другая—въ усвоеніи дѣтymi перемѣстительнаго закона. Противъ первой трудности единственное средство въ своевременномъ утвержденіи таблицы по частямъ и постоянныхъ письменныхъ и устныхъ упражненіяхъ въ этомъ направленіи. При этомъ должно принять къ свѣдѣнію, что таблицу умноженія дѣти должны же когда нибудь усвоить себѣ на-память, и чѣмъ раньше достигнуто твердое знаніе ея, тѣмъ лучше. По самою разумѣется, что къ ея усвоенію не надо приступать ранѣе усвоенія дѣтymi точной идеи объ умноженіи; учащій кромѣ того долженъ добиться того, чтобы дѣти поняли пользу и необходимость твердаго, на-память, знанія таблицы.—Что касается перемѣстительнаго закона, то дѣти не только должны себѣ его усвоить, но также быть въ состояніи (сначала на наглядныхъ пособіяхъ, а потомъ, если возможно, и на отвлеченныхъ примѣрахъ) объяснить его причину. Лучшее всего для этого брать числа не очень малыя: одно изъ чиселъ должно быть равно не менѣе 6-ти или 7-ми *). Выясненіе закона можетъ быть поведено слѣдующимъ образомъ: пусть дано 9 связокъ свичекъ по 7-ми штукъ въ каждой связкѣ; взявъ по одной свичкѣ изъ каждой связки, получимъ 9 свичекъ; свяжемъ ихъ въ одну связку; взявъ изъ оставшихся связокъ еще по одной свичкѣ, получимъ снова 9 свичекъ; свяжемъ и эти 9 свичекъ въ одну связку; и т. д. (остальное опускается въ виду простоты дальнѣйшихъ разсужденій). Лучшее всего выясненіе закона вести на наглядныхъ пособіяхъ; при этомъ можетъ оказаться, что дѣти не сразу увидятъ самый первъ доказательства. Но учащій этимъ не долженъ смущаться: онъ долженъ помнить, что не только доказательство, но и самая необходимость его чаще всего дѣтymi совершенно недоступны. Поэтому упражненія въ этомъ направленіи должны вестись до тѣхъ поръ, пока каждый изъ учащихся будетъ въ состояніи съ полнымъ разсужденіемъ, хотя бы на на-

*) На мысль о пользѣ большихъ чиселъ мы случайно наведены П. К. Соколовымъ, при преподаваніи математики въ Сѣб. учительскомъ институтѣ, о чемъ считаемъ приятнымъ долгомъ своимъ заявить.

глядныхъ пособіяхъ, доказать справедливость перемѣстительнаго закона для всѣхъ чиселъ перваго десятка *)).

§ 12. По усвоеніи таблицы умноженія и всѣхъ прочихъ элементовъ пройденнаго курса можно приступить къ обоимъ случаямъ дѣленія: дѣленію числа на равныя между собою части и кратному сравненію цѣлыхъ чиселъ (въ предѣлахъ, конечно, таблицы умноженія). Для убѣжденія дѣтей въ недостаточности пройденнаго при разрѣшеніи практическихъ вопросовъ и на этой ступени необходимы задачи. (I, 361—390). Но для того чтобы дѣти скорѣе и основательнѣе убѣдились въ необходимости новаго дѣйствія, задачи эти не должны поддаваться быстрому разрѣшенію съ помощью догадокъ; поэтому задачи на раздѣленіе 2-хъ, 4-хъ, 6-ти, даже 8-ми единицъ на двѣ равныя части или 3-хъ и 6-ти единицъ на 3 равныя части неумѣстны въ большомъ количествѣ на этой ступени обученія. При несложной фабулѣ задачи должны быть большею частью таковы, чтобы только немногіе ученики могли легко разрѣшить ихъ наугадъ, не сознавая того процесса мысли, который вообще въ такихъ случаяхъ можетъ привести къ разрѣшенію задачи. Когда дѣти усвоили себѣ хоть какой нибудь пріемъ рѣшенія этого рода задачъ, имъ долженъ быть показанъ знакъ дѣленія на равныя части, за каковой можно принять знакъ $\frac{_}{_}$. Помощью этого знака требованіе „раздѣлить 15 на три равныя части“ изобразится такъ:

15 $\frac{3}{3}$.

Эту запись ученики должны сначала читать такъ: „пятнадцать, раздѣленное на три равныя части, равно пяти“ **). Связь дѣйствія дѣленія на равныя части съ умноженіемъ можетъ быть выяснена на любыхъ задачахъ, но при этомъ не должно особенно торопиться.

Учащій никогда не долженъ забывать, что видъ таблицы умноженія на этой ступени не должно встрѣчаться ни одного случая

*) Въ нашемъ „Учебникѣ ариметики“ (M. 1887) законъ перемѣстительный принятъ безъ доказательства, такъ какъ на самомъ дѣлѣ онъ принадлежитъ къ числу довольно очевидныхъ и такъ какъ изложеніе выше даннаго доказательства для учебника не достаточно общее, а болѣе научное доказательство, предложенное въ одной изъ „дополнительныхъ статей“ нашего Учебника, мало говоритъ воображенію малолѣтняго учащагося. Мы съ тѣмъ большимъ правомъ рѣшились на такую постановку вопроса, что учебникъ нашъ не преслѣдуетъ цѣлей самоучителя и преподавателя непрѣзкое руководительство учителя.

**). Со словами „равно“ и „равняется“ дѣти должны быть ознакомлены раньше; мы не указываемъ на какой именно ступени это должно быть сдѣлано, такъ какъ самъ учитель лучше можетъ судить когда именно ознакомленіе съ значеніемъ этихъ словъ бу сть своевременно. Скорѣе всего это можетъ быть сдѣлано, кажется, на той ступени, когда появляются формулы разложенія ($12=10+2$), въ которыхъ знакъ равенства не можетъ быть въ устной рѣчи удобно замѣненъ словомъ „составляетъ“.

дѣленія двузначнаго числа на однозначное, съ каковымъ дѣленіемъ (безъ остатка) онъ прежде всего и долженъ познакомиться учащагося. Введеніе понятія объ уменьшеніи въ нѣсколько разъ на этой ступени неумѣстно, такъ какъ это выходитъ за предѣлы первоначальнаго обученія, а представляетъ уже одно изъ приложений дѣйствія дѣленія. Но зато на этой ступени умѣстно ознакомленіе дѣтей съ нахожденіемъ одной какой либо доли даннаго числа и даже съ обозначеніемъ долей. Для упражненія же дѣтей въ дѣленіи на части съ большою пользою для дѣла могутъ быть проработаны задачи на простое тройное правило въ предѣлахъ таблицы умноженія (I, 481—482), но притомъ такого рода, чтобы приходилось прибѣгать только къ дѣленію на равныя части и умноженію, а не къ кратному сравненію (I, 483 и т. п.); такія задачи учащій безъ труда придумаетъ и самъ. Эти задачи должны быть составлены такъ, чтобы для ихъ разрѣшенія необходимо было сначала раздѣленіе одной величины на равныя части, а потомъ умноженіе полученнаго частнаго на нѣкоторое отвлеченное число: въ нихъ, какъ это замѣчено выше, должно избѣгать случаевъ, когда для рѣшенія задачи на тройное правило требуется найти сначала отношеніе двухъ величинъ, а потомъ уже нѣкоторое число или величина умножается на это отношеніе.

При первоначальномъ обученіи, по нашему мнѣнію, полезно и даже почти необходимо для обозначенія дѣйствія дѣленія на равныя части прибѣгать къ знаку, отличному отъ знака, обозначающаго дѣйствіе сравненія двухъ чиселъ въ кратномъ отношеніи. Дѣло въ томъ, что подведеніе двоякаго смысла дѣленія подъ одну общую формулу, подъ одну рубрику и одно опредѣленіе при первоначальномъ обученіи, справедливо избѣгающемъ примѣненія опредѣленій, невозможно. А потому въ I-ой части нашего „Методическаго Сборника задачъ“ мы, по при мѣруочень многихъ авторовъ, ввели для обозначенія дѣленія на равныя части знакъ \div . Думаемъ, что противъ этого нельзя сдѣлать какія либо всѣкія возраженія, тѣмъ болѣе, что при систематическомъ курсѣ, который имѣется въ виду въ ч. II нашего „Методическаго сборника“ и нашемъ «Учебникѣ ариметики для сред. уч. зав.» принять взглядъ, болѣе отвѣчающій требованіямъ научнымъ.

§ 13. Слѣдующую ступень обученія составляетъ ознакомленіе дѣтей съ другимъ случаемъ дѣленія—съ кратнымъ сравненіемъ. Для этой цѣли могутъ служить задачи на наглядныхъ пособіяхъ. Эта ступень представляетъ весьма большія трудности, а потому наглядныя пособія не должны быть игнорируемы при выясненіи смысла вопроса: «сколько разъ одно число содержится въ другомъ». Связь кратнаго сравненія съ умноженіемъ и отличіе его отъ дѣйствія дѣленія на равныя части не должны быть учащимъ забытаемы ни на одну минуту: въ противномъ случаѣ онъ рискуетъ

напрасно потратить слишком много времени. Въ особенности полезны для этой цѣли задачи, требующія краткаго сравненія именованныхъ чиселъ въ предѣлахъ таблицы умноженія. За знакъ краткаго сравненія принято (:), и запись

$$15 : 5 = 3$$

учащій долженъ сначала читать такъ: «пятнадцать единицъ содержать пять три раза». Что кратное сравненіе есть не что иное, какъ видъ *дѣленія*—ученики на этой ступени понять не могутъ, и поэтому добиваться отъ нихъ этого пониманія было бы излишне. Само собою разумѣется, что и на этой ступени въ упражненія не должно входить такихъ данныхъ, которыхъ нѣтъ въ таблицѣ умноженія. (1, 421—505).

Упражненія дѣтей въ дѣленіи числа на равныя части и въ кратномъ сравненіи чиселъ, а также въ остальныхъ дѣйствіяхъ, для каковой цѣли могутъ служить упражненія, проработанныя рабѣ, учащій долженъ обратить вниманіе при устныхъ вычисленіяхъ на случаи, когда дѣленіе и кратное сравненіе даютъ остатокъ. Въ первой части нашего «Методическаго сборника» мы въ началѣ пренебрегли этими случаями и возложили эту работу исключительно на учащаго. Мы позволили себѣ это сдѣлать по двумъ соображеніямъ: 1) мы такимъ образомъ даемъ большой просторъ урокамъ учащаго, 2) мы не считаемъ возможнымъ на первыхъ ступеняхъ задавать при первоначальномъ обученіи задачи, не разрѣшимыя въ цѣлыхъ числахъ.

Тѣмъ не менѣе считаемъ необходимымъ ознакомленіе дѣтей съ случаями дѣленія и краткаго сравненія, дающими остатокъ. Весь вопросъ можетъ заключаться только въ томъ, когда это сдѣлать и какъ вести запись примѣровъ, дающихъ остатки. По нашему мнѣнію, лучше всего этимъ не торопиться, формулы же писать такъ:

$$„ 27 \overline{) 4} = 6, \text{ а въ остаткѣ } 3“,$$

$$„ 39 \overline{) 5} = 7, \text{ а въ остаткѣ } 4“, \text{ и т. п.}$$

Всякіе иные способы обозначенія намъ кажутся не достаточно вразумительными и точными.

§ 14. Относительно устныхъ вычисленій при первоначальномъ обученіи должно замѣтить, что главное вниманіе учащаго должно быть имъ обращено на сложеніе двухъ или нѣсколькихъ однозначныхъ чиселъ, на умноженіе и дѣленіе въ предѣлѣ первой сотни и на сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ. Задачъ же съ условіями, какія встрѣчаются въ изобиліи въ сборникѣ задачъ для устныхъ вычисленій г. Малькина (по Церингеру), да и вообще задачъ съ условіями, должно по возможности избѣгать при упражненіяхъ въ устномъ вычисленіи. Введеніе подобныхъ задачъ въ первоначальный курсъ было бы только помѣхой при прохожденіи его, такъ какъ онъ подается основательной про-

работкѣ только при соблюденіи большой экономіи во времени. Если учитель самъ хорошій счетчикъ и если онъ въ состояніи живо и безошибочно вычислять въ умѣ, то и его ученики даже въ теченіе короткаго промежутка времени приобретутъ нѣкоторыя умѣнія въ быстромъ устномъ вычисленіи; если же онъ самъ счетчикъ не совсѣмъ ловкій и энергичный, то при нѣкоторомъ желаніи онъ сдѣлаетъ большіе успѣхи именно благодаря своимъ ученикамъ. Пренебрегать устными вычислениями онъ во всякомъ случаѣ не имѣетъ права. Форма упражненій въ устныхъ вычисленияхъ должна быть по возможности простая, напр., въ слѣдующемъ родѣ:

2 да 8 сколько будетъ? Да 3! Долой 6! помножь на 3! долей 7! прибавь 10! и т. д., смотря по знаніямъ учащихся.

При этомъ отъ учащихся должно требовать по возможности немедленныхъ отвѣтовъ, что конечно дозволительно тогда, когда упражненія этого рода совершенно по силамъ учащихся. Кромѣ того само собою разумѣется, что на какой ступени обученія возможны и обязательны устные вычисления на-ряду съ усваиваемымъ въ данную минуту письменнымъ аппаратомъ того или другого дѣйствія.

§ 15. При рѣшеніи задачъ отъ учащихся обыкновенно требуютъ, во 1-хъ, объясненія причины — почему они поступаютъ съ данными числами такъ, а не иначе и, во 2-хъ, непременно полнаго отвѣта на вопросъ. Оба эти требованія вовлекаютъ учащаго въ крайности, отъ которыхъ учебное дѣло только страдаетъ.

Объясненіе причины примененія даннаго дѣйствія чаще всего невозможно, если ранѣе не дано опредѣленія этого дѣйствія и такимъ образомъ не дано учащемуся возможности опираться въ своихъ отвѣтахъ на опредѣленія. Но при первоначальномъ обученіи арифметикѣ опредѣленія невозможны, а потому и требованіе отъ учащагося вѣрнаго отвѣта на вопросъ о причинѣ примененія дѣйствія не вполне законно. Въ проектируемомъ же нами первоначальномъ курсѣ это даже просто не целесообразно; по нашей системѣ задачи разбираются не въ видѣ примененія уже извѣстныхъ дѣйствій, а часто исключительно для выработки надлежащаго понятія о неизвѣстномъ еще дѣйствіи. Такимъ образомъ при нашей системѣ вопросъ о причинѣ, почему въ результатѣ получается то, а не иное число, почему въ данномъ случаѣ учащійся прибавилъ, а въ другомъ отвѣтилъ данное число — такой вопросъ повторяемъ, прямо противорѣчитъ цѣли задачъ и ихъ значенію какъ средства для выработки понятія о дѣйствіи. Единственный вопросъ, дозволительный при рѣшеніи задачи со стороны учащаго, можетъ быть слѣдующій: „какъ ты это узналъ?“ На такой вопросъ можетъ быть данъ отвѣтъ: „прибавилъ“, „отнять“, „откинуть“, „сосчитать“, „сложить“, „помножилъ“, и т. п.

Дѣйствительно пусть предложена задача: „торговецъ продалъ пять штукъ гусей и двѣ утки, сколько онъ всего продалъ птицы?“ Здѣсь вопросъ о томъ—почему учащійся думаетъ, что торговецъ продалъ 7 штукъ разной птицы, не умѣетъ, тѣмъ болѣе, что малолѣтній учащійся еще не доросъ до вѣрнаго пониманія закона причинности.

Что касается полныхъ отвѣтовъ, то требовать ихъ постоянно, какъ это дѣлають нѣкоторые, ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ. Принципъ полныхъ отвѣтовъ ведетъ къ крайней искусственности рѣчи и лишаетъ ее, если можно такъ выразиться, жизни и простоты. Дѣтей не слѣдуетъ учить такому способу изъясняться, какой не употребляется никѣмъ, кромѣ педагогически слѣдующихъ этому принципу учителей. Ибо никто на вопросъ о томъ — не знаетъ ли онъ, который теперь часъ, не отвѣтитъ полнымъ отвѣтомъ: „я знаю, что теперь половина третьяго“. Требовать полного отвѣта отъ дѣтей можно и даже должно только тогда, когда только полный отвѣтъ удовлетворителенъ и естествененъ. Но еще чаще слѣдуетъ отъ учащагося требовать самаго краткаго отвѣта, какой только возможенъ: это укрѣпляетъ его мысль и можетъ оказать на его сужденіе хорошее воспитательное вліяніе. Такъ, напр., на вопросъ о томъ—сколько десятковъ въ 50-ти, учащійся долженъ отвѣтить: „пять“, либо же самымъ полнымъ отвѣтомъ: въ 50-ти пять десятковъ. Середина очень часто оказывается въ подобныхъ случаяхъ не удовлетворительной. Природный педагогическій тактъ учащаго можетъ быть наилучшимъ руководителемъ при сужденіи объ удовлетворительности и умѣстности полного отвѣта.

§ 16. Прежде чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ ступенямъ первоначальнаго курса арифметики, позволимъ себѣ остановиться на вопросѣ о терминахъ. Научныя опредѣленія въ этомъ курсѣ надозволительны, какъ мы объ этомъ имѣли случай не разъ говорить раяѣ. Но съ терминами дѣти все-таки должны и могутъ быть ознакомлены. Такъ, ими можетъ быть, безъ помощи опредѣленій, усвоено, что значать слова: „сложить“, „вычесть“, „умножить“, „раздѣлить“, „сколько разъ содержится“, „слагаемое“, „сумма“, „уменьшаемое“, „вычитаемое“ и „остатокъ“, „множимое“, „множитель“ и „произведеніе“, „дѣлимое“, „дѣлитель“, „частное“ и „отношеніе“. Но при этомъ съ терминологіей каждаго дѣйствія дѣтей надо знакомить уже послѣ того, какъ это дѣйствіе понято учащимся, послѣ того какъ ими усвоена цѣль, логическій смыслъ, простѣйшій случай примѣненія и какой либо приемъ совершенія дѣйствія хотя бы надъ однозначными числами. При этомъ не должно давать опредѣленій, а должно только *выяснить*, что сложить одно число съ другимъ значитъ прибавить второе къ первому. и т. п.

Только относительно кратнаго сравненія должно соблюсти некоторую осторожность: называть въ этомъ случаѣ данныя числа дѣлимымъ и дѣлителемъ не слѣдуетъ при первоначальномъ обученіи; не слѣдуетъ также называть результатъ кратнаго сравненія частнымъ, ибо эта терминологія не довольно обоснована въ этомъ курсѣ. Мы поэтому считаемъ болѣе удобнымъ слѣдующую терминологию кратнаго сравненія: дѣлимое можно называть первымъ числомъ, дѣлителя—вторымъ, а частное—отношеніемъ перваго числа ко второму.

§ 17. Когда четыре дѣйствія усвоены дѣтми въ намѣченномъ выше объемѣ, можно перейти къ нумераціи трехзначныхъ и четырехзначныхъ чиселъ. (I, 521—530). Выясненіе примѣненія уже усвоенной дѣтми идеи нумераціи къ трехзначнымъ числамъ не представляетъ особенныхъ затрудненій, если прибѣгнуть къ счетамъ, а въ особенности къ сличкамъ, и если дѣти прочно усвоили себѣ нумерацію двузначныхъ чиселъ и счетъ отъ ста до 999-ти. Болѣе трудности представляетъ введеніе новой единицы счета—тысячи. Трудности эти зависятъ, впрочемъ, главнымъ образомъ отъ того, что еще недостаточно развитое воображеніе ребенка не сразу соглашается обособить десять сотенъ въ одну единицу, а непривычка къ обобщеніямъ препятствуетъ распространить законъ нумераціи далѣе. Изъ наглядныхъ пособій при этомъ наибольшую услугу оказываютъ, конечно, „солома“ и счеты. Но учащій не долженъ особенно огорчаться первоначальными неуспѣхами дѣтей въ этомъ направленіи: прежде чѣмъ ребенокъ не совершенно свыкся съ идеею тысячи, ему очень трудно ориентироваться въ нумераціи четырехзначныхъ чиселъ. Для внесенія разнообразія въ занятія нумераціею четырехзначныхъ чиселъ полезно заняться сложеніемъ большихъ двузначныхъ и небольшихъ трехзначныхъ чиселъ, а также сложеніемъ и вычитаніемъ трехзначныхъ чиселъ. (I, 531—547). При домашнемъ обученіи полезно прибѣгать къ солому и наглядному составленію суммы и разности данныхъ чиселъ по закону нумераціи, при классномъ же—къ счетамъ торговымъ и шведскимъ, если счета послѣдняго рода имѣются въ распоряженіи класса и если употребленіе сличекъ почему либо неудобно *).

Само собою разумѣется, что для пріученія дѣтей къ сознательному, толковому, съ полнымъ разумѣніемъ, производству дѣйствій сложения и вычитанія необходимо, чтобы они умѣли вслухъ объяснять процессъ производства дѣйствія. При этомъ надо стре-

*) При обозначеніи чиселъ четырехзначныхъ должно пріучить дѣтей къ отдѣленію цифры тысячъ отъ остальныхъ большимъ промежуткомъ, чѣмъ каковыя отдѣляются цифры сотенъ, десятковъ и единицъ одна отъ другой. Заглавая въ этомъ случаѣ неумѣтна по нонансамъ причисламъ.

миться къ тому, чтобы дѣти сложеніе однозначныхъ чиселъ производили безъ записки и не повторяя каждый разъ полученныхъ суммъ. Такъ, должно пріучить дѣтей къ слѣдующему способу сложенія: 3 да 7—десять, да 4—четырнадцать, да 2—шестнадцать, да 8—двадцать четыре и т. д. Что же касается вычитанія, то при первоначальномъ обученіи должно пріучать къ способу, основанному на раздробленіи единицы ближайшаго разряда въ единицы низшаго, когда вычитаніе иначе невозможно. Трудности представляются только при степеніи двухъ или нѣсколькихъ нулей въ уменьшаемомъ. Но если усвоена самая идея такъ называемаго займа или, вѣрнѣе, раздробленія одной единицы высшаго разряда, то дѣти легко себѣ усваиваютъ не только технику, но и самую сущность производства вычитанія,—въ особенности, если сущность этого производства выиснена на наглядныхъ пособіяхъ (спичкахъ и счетахъ). При этомъ замѣчательна слѣдующая разница между сложеніемъ и вычитаніемъ: въ то время какъ при сложеніи въ наглядномъ видѣ даны оба числа, при вычитаніи въ наглядномъ видѣ дано только уменьшаемое, вычитаемое же либо удерживается въ умѣ, либо записывается на бумагѣ или доскѣ.

§ 18. Слѣдующую ступень обученія составляетъ умноженіе многозначныхъ чиселъ (меньшихъ десяти тысячъ) на однозначныя. Первоначально, притомъ довольно долго, надо разсматривать это дѣйствіе съ точки зрѣнія равныхъ между собою слагаемыхъ. Такъ должны быть разсматриваемы, напр., всѣ упражненія подъ №№ 561—575 въ первой ч. нашего „Методическаго Сборника“: потери времени при этомъ получатся не большія, а для выясненія сущности дѣла это окажется крайне полезнымъ. Особенныхъ трудностей на этой ступени не представляется. Упраженія письменныя (I, 576—600) должны чередоваться изустными упражненіями въ умноженіи небольшихъ двузначныхъ на небольшія однозначныя числа. При этомъ вниманіе дѣтей должно быть обращено также и на разницу между изустнымъ и письменнымъ производствомъ умноженія на однозначное число: разница эта заключается въ томъ, что при устномъ вычисленіи начинаютъ съ единицы высшаго, а при письменномъ—съ единицы низшаго разряда. Если учащій не слишкомъ спѣшитъ перейти къ механическому производству умноженія, дѣти необыкновенно основательно усваиваютъ себѣ смыслъ умноженія и способъ его производства. По большей части они сами, безъ указанія учителя, доходятъ до пользы предварительнаго сложенія равныхъ между собою разрядныхъ чиселъ съ цѣлью прибавленія къ полученному оставшихся отъ предшествующаго сложенія единицъ того же разряда. Поэтому сначала не должно мѣшать сложенію въ порядкѣ менѣе удобномъ, при которомъ оставшееся отъ сложенія число даннаго высшаго разряда прибавляется къ первому изъ равныхъ между

собой единицы того же разряда. Время, потерянное при этомъ выжиданіи, нельзя считать потеряннымъ безслѣдно *).

§ 19. Умноженіе многозначныхъ чиселъ на многозначныя, по нашему крайнему разумѣнію, выходитъ за предѣлы первоначальнаго курса арифметики, равно какъ и дѣленіе многозначныхъ на многозначныя. Но во всякомъ случаѣ послѣ умноженія чиселъ на однозначное число слѣдуетъ перейти къ дѣленію чиселъ на однозначное число. Начать должно съ вычисления частныхъ, въ которыхъ число цифръ равно числу цифръ дѣляимаго, при чемъ каждая цифра дѣляимаго обозначаетъ число крайнего дѣлителя; таковы примѣры:

$$286 \underline{) 2}, 369 \underline{) 2}, 693 \underline{) 2}, 864 \underline{) 2} \text{ и т. п.}$$

(такихъ примѣровъ въ ч. I-й нашего „Сборника“ не предложено); затѣмъ можно перейти къ рѣшенію задачъ на дѣленіе съ болѣе трудными данными (I, 601—615) и къ вычисленію соответствующихъ примѣровъ (I, 616—640). Здѣсь учителю приходится много работать надъ случаями, когда число цифръ частнаго меньше числа цифръ дѣляимаго и вообще когда не каждая цифра дѣляимаго дѣлится на дѣлителя. При этомъ наиболѣе затруднительнымъ является для учащихся ученіе о дѣленіи, если учитель имѣетъ привычку говорить: 3 сотни нельзя раздѣлить на 4 равныя части и т. п. Поэтому ему, если у него есть эта привычка, прежде всего надо отдѣлаться отъ нея и приучить дѣтей отыскивать *не цифры* частнаго, а *разряды* его. Въ этомъ заключается центръ трудностей дѣленія. На этой ступени требуется строгая методичность и постепенный переходъ отъ чиселъ двузначныхъ къ трехзначнымъ, отъ этихъ послѣднихъ къ четырехзначнымъ и т. д. Чѣмъ лучше дѣти себѣ усвоить способъ производства дѣленія двузначнаго числа на однозначное въ случаяхъ, дающихъ въ результатѣ число двузначное, тѣмъ, конечно, легче будетъ преодоленіе остальныхъ трудностей этой ступени. Поэтому на указанный случай должно обратить особенное вниманіе. Дѣло въ томъ, что ранѣе дѣти научились только тѣмъ случаямъ дѣленія двузначнаго числа на однозначное, которые сводятся къ болѣе или менѣе непосредственной помощи данныхъ таблицы умноженія; поэтому они, будучи въ состояніи раздѣлить довольно большое двузначное число, напр., на 8 или на 9, не въ состояніи раздѣлить небольшое, сравнительно, число, напр., 28 или 34, на дру-

*) Очень полезно при этомъ упражнять дѣтей въ примѣненіи перемѣстительнаго закона къ случаямъ, когда множитель есть число однозначное, а множимое—число многозначное. Помимо болѣе твердаго усвоенія этого закона и пользы, которая при этомъ можетъ быть извлечена для дѣтей изученія умноженія, это обязывается почти необходимымъ при кратномъ сравненіи многозначныхъ чиселъ съ однозначными. См. ниже.

гое очень небольшое, напр., на 2, или 45 и 48 на 3, и т. д. *) Къ этимъ случаямъ дѣли не умѣютъ прилагать своего знанія таблицы умноженія, а потому ихъ прежде всего должно научить производству дѣленія двузначнаго числа на однозначное, дающему въ результатѣ болѣе десяти. При этомъ учащій, конечно, не долженъ забывать, что не только при выясненіи идеи о дѣйствіи дѣленія, но даже при производствѣ этого дѣйствія, онъ долженъ строго отличать дѣйствіе дѣленія на части отъ дѣйствія кратнаго сравненія, такъ какъ на этой ступени дѣли еще не могутъ выработать себѣ точное понятіе о причинѣ почему каждый изъ этихъ случаевъ можетъ быть логически приведенъ къ другому изъ нихъ. Что касается дѣленія трехзначнаго и четырехзначнаго числа на однозначное, то принципъ производства этого дѣйствія въ случаѣ многозначнаго дѣлимаго тотъ же, что въ случаѣ дѣлимаго двузначнаго, дающаго при раздѣленіи на данное дѣлителя двузначное же частное А потому, если этотъ послѣдній случай дѣльми ранѣе усвоенъ основательно, то особенно большихъ трудностей на этой ступени обученія ариметикѣ уже не предвидится.

Когда мы имѣемъ дѣло съ дѣленіемъ числа на нѣсколько равныхъ частей, напр., 3744 на 6, то при этомъ первоначально ходъ разсужденій можетъ быть слѣдующій: въ каждой изъ этихъ частей не можетъ быть ни одной тысячи, потому что если бы въ ней была хоть одна тысяча, то во всемъ числѣ было бы не меньше 6-ти тысячъ а въ немъ тысячъ всего 3. Далѣе: во всемъ числѣ сотенъ 37; въ каждой шестой доль этого числа болѣе, чѣмъ одна сотня, потому что и т. д.; въ ней болѣе чѣмъ 3 сотни, болѣе чѣмъ 4 сотни, болѣе, чѣмъ 5 сотенъ, но не болѣе, чѣмъ 6 сотенъ, потому что и т. д. Дальнѣйшее совершенно аналогично только что изложенному. Должно замѣтить, что въ началѣ не мѣшаетъ приучить дѣтей къ слѣдующему обозначенію частнаго: $600 \div 6 = 20 \div 4$

Когда же мы имѣемъ дѣло съ кратнымъ сравненіемъ, напр., 3744-хъ съ 6-тью, то разсуждать можно такъ: въ 3-хъ тысячахъ шесть единицъ не могутъ содержаться тысячу разъ, потому что если взять 6 единицъ тысячу разъ, то при этомъ получится то

*) Этотъ фактъ дѣлаетъ, между прочимъ, возможною практическую и научную оцѣнку глѣзъ методъ обученія ариметикѣ, въ основѣ которыхъ лежатъ такъ называемое „изученіе“ чиселъ и которыя, поэтому, особенное значеніе приписываютъ величинѣ самихъ чиселъ, а не сущности и способамъ производствъ надъ ними арифметическихкихъ дѣйствій. Онѣ доказываютъ, что при производствѣ дѣленія, даже на однозначное число, трудность заключается вовсе не въ величинѣ дѣлителя, т. е. числа „дѣлимаго“, а въ самой логикѣ арифметическаго дѣйствія и его производствъ.

же, что получилось бы, если бы мы взяли одну тысячу 6 разъ, т. е. получилось бы 6000, а у насъ всего 3000. Остальное можетъ быть поведено сообразно съ тою же что изложеннымъ и при томъ аналогично съ дѣльствомъ дѣления на равныя части.

Взвѣсное соотношеніе дѣльства дѣления на равныя части и кратнаго сравненія не должно, повторимъ, на этой ступени затрагивать: первоначальное обученіе ариметикѣ можетъ преслѣдовать только близъ лежащія цѣли, не задаваясь научными перспективами и ограничиваясь только первоначальными, основными арифметическими понятиями, умѣніями и знаніями.

Всѣмъ выше изложеннымъ съ присоединеніемъ рѣшенія простыхъ чисто арифметическихъ задачъ въ соотвѣствующемъ пройденному объемѣ (I, 641—700) можно бы ограничиться при первоначальномъ обученіи ариметикѣ, такъ какъ нумерація во всемъ объемѣ и дѣльства (во всемъ объемѣ) нѣтъ многозначными числами съ одной стороны выходятъ за предѣлы первоначальнаго курса, а съ другой стороны составляютъ существеннѣйшій элементъ курса систематическаго. Тѣмъ не менѣе мы здѣсь изложимъ нѣкоторые соображенія о первоначальномъ прохожденіи и этихъ статей, такъ какъ установленный нами выше взглядъ на первоначальное обученіе не принадлежитъ къ числу общепризнанныхъ.

§ 20. Въ основѣ нумераціи вообще (по какой угодно системѣ счисленія) лежитъ только идея о томъ, что отношеніе единицы одного разряда къ единицѣ слѣдующаго разряда есть число постоянное. Въ десятичной системѣ счисленія отношеніе это равно десяти; но какъ только мы переходимъ отъ письменнаго счисленія къ счисленію устному, то вскорѣ, появляется необходимость разбить число также и на классы, каковой необходимости остальные системы счисленія вовсе не подчиняются. Такимъ образомъ въ основѣ нумераціи по десятичной системѣ лежатъ, строго говоря, двѣ идеи: 1) идея о десятичномъ отношеніи единицъ смежныхъ разрядовъ, и 2) идея о необходимости введенія въ некотораго единообразія въ группировкѣ разрядныхъ чиселъ, т. е. о необходимости введенія классовъ: единицъ, тысячъ, миллионовъ, миллиардовъ и т. д. Съ первую идею дѣли достаточно свѣдѣлись, имѣли дѣло съ трехзначными числами, вторая же проявляется, хоги сначала и въ не довольно рѣзкой формѣ, съ переходомъ отъ трехзначныхъ чиселъ къ четырехзначнымъ. Та послѣдовательность, какой должно держаться при ознакомленіи дѣтей съ единицами первыхъ трехъ разрядовъ, на дальнѣйшихъ ступеняхъ уже не цѣлесообразна, такъ какъ, при обозначеніи тысячъ, миллионовъ и т. д. примѣняются то же правило и тѣ же словесныя обозначенія, съ которыми связано обозначеніе трехзначныхъ чиселъ. Говоря иначе, дѣти должны понять: 1) что придумывать для единицы каждаго вѣтъ еще не извѣстныхъ имъ

разрядовъ (они знаютъ только разряды единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ) было бы очень неудобно. и 2) что эти неудобства устранены благодаря тому, что число тысячъ считается такъ же, какъ считается любое число единицъ перваго разряда, меньшее тысячи, и что поэтому съ помощью цифръ принято обозначать число тысячъ на тѣхъ же точно основаньяхъ, на какихъ обозначаются числа перваго класса. Для того чтобы дѣти поняли единообразіе въ обозначеніи цифрами единицъ различныхъ классовъ, ихъ весьма полезно пручить къ отдѣленію тысячъ отъ сотенъ промежуткомъ величиною не много менѣ ширины одной цифры. Запятая не вполне пригодна для этой цѣли, такъ какъ этотъ знакъ имѣетъ специальное значеніе при обозначеніи десятичныхъ дробей. Кроме того, въ жизни и даже въ наукѣ числа рѣдко превышаютъ миллионы, а для распознаванія чиселъ съ большимъ количествомъ цифръ и запятыя оказываются недостаточно отличяющими различные классы. Когда дѣти вполне усвоили себѣ способъ изображенія помощью цифръ шестизначныхъ чиселъ, ихъ можно ознакомить съ миллионами и т. д., хотя лучше ранѣе поупражнять ихъ въ соотвѣствующемъ сложении и вычитаніи. (1, 701—740). Считаеь при этомъ умѣстнымъ замѣтить, что въ нашихъ сочиненіяхъ принята такъ называемая трехразрядная (французская) система классовъ: тысяча тысячъ—миліонъ, тысяча миліоновъ—биліонъ, тысяча биліоновъ—триліонъ, и т. д. Эта система за послѣднее время приобрѣла право гражданства и заслуженныя ею симпатіи въ большинствѣ учебниковъ и учебныхъ пособій предпочтительно предъ другими весьма основательны.

Съ твердымъ усвоеніемъ нумераціи усвоеніе дѣтми первыхъ двухъ дѣйствій не представляетъ такихъ трудностей, на которыхъ здѣсь стоило бы останавливаться.

§ 21. За-то тѣмъ больше трудностей представляютъ дѣйствія умноженія и дѣленія на многозначное число и кратное сравненіе многозначныхъ чиселъ.

Главнѣйшая трудность вынесенія умноженія многозначнаго числа на многозначное состоитъ въ прученіи дѣтей къ сознательному, хотя и инстинктивному отчасти прильненію распредѣлительнаго закона, по которому

$(a+b+c+\dots+n) \times A = a \times A + b \times A + c \times A + \dots + n \times A$;

ибо для того, чтобы вывести, что

$$375 \times 10 = 3750$$

надо принять къ свѣдѣнію, что

$$375 \times 10 = (300 + 70 + 5) \times 10 = (10 \times 300) + (10 \times 70) + (10 \times 5).$$

т. е. равняется

$$3000 + 700 + 50 \text{ или } 3750.$$

Еще больше трудностей на той ступени обученія, на которой дѣти знакомятся съ умноженіемъ на нѣсколько единицъ одного

разряда. Здѣсь, кромѣ сказанныхъ двухъ законовъ, находить примѣненіе также и законъ сочетательный, по которому произведеніе не мѣняется отъ перемѣны въ группировкѣ производителей, т. е. законъ, по которому

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c):$$

дѣйствительно, умноженіе 375 на 70 (т. е. на 7×10) сводится къ умноженію этого числа сначала на 7, а потомъ на 10, или сначала на 10 а потомъ на 7.

Что же касается умноженія на многозначное число съ нѣсколькими значащими цифрами, то здѣсь прилагается законъ распределительный въ болѣе обширномъ его примѣненіи, а именно законъ, по которому произведеніе изъ одной суммы на другую можетъ быть выражено въ видѣ суммы частныхъ произведеній каждаго слагаемаго первой суммы на каждое слагаемое второй *).

Если предъидущее проработано основательно, то это преодолѣвается сравнительно легко. О сказанныхъ законахъ говорить, конечно, не слѣдуетъ, такъ какъ они въ общемъ видѣ дѣйствій недоступны и такъ какъ, къ счастью, возможно, даже ни разу не формулировавъ ихъ, легко достигнуть того, чтобы учащіеся вполне уяснили и сознательно усвоили себѣ тѣ промежуточные разсужденія, которые вполнѣ приводятъ къ окончательному правду умноженія многозначнаго числа на многозначное. Но при этомъ долженъ быть соблюденъ нѣкоторый порядокъ, и характеръ упражненій, которыя на этихъ ступеняхъ должны быть проработаны при непосредственной помощи учителя.

Прежде всего должны быть усвоены умноженіе многозначнаго числа на 10, умноженіе однозначнаго числа единицъ какого либо разряда на 10, и умноженіе любого многозначнаго числа на 10. (I, 741—750) Затѣмъ должно быть усвоено умноженіе на однозначное число десятковъ (I, 751—755). Далѣе тѣ же умѣнья должны быть усвоены по отношенію къ единицамъ высшихъ разрядовъ (I, 756—763). Послѣ этого можетъ быть пройдено умноженіе многозначнаго на многозначное же и притомъ по слѣдующей схемѣ: пусть требуется умножить 4283 на 245. Изобразивъ это требованіе такъ:

245 развѣ	}	4283	отберемъ сначала только пять слагаемыхъ, потомъ
		4283	40, и наконецъ - 200. Пять слагаемыхъ дадутъ въ
		4283	суммѣ
		:	4283 \times 5, т. е. 21415,
		:	сорокъ слагаемыхъ дадутъ
		:	4283×40 , т. е. $(4283 \times 10) \times 4$,
-4283	наконецъ 200 слагаемыхъ дадутъ		
		4283×200 , т. е. $(4283 \times 100) \times 2$.	

* Законъ этотъ въ видѣ алгебраической формулы можетъ быть выраженъ такъ $(A + B + \dots + M) \times (a + b + \dots + m) = Aa + Ab + \dots + Am + Ba + Bb + \dots + Bm + \dots + Ma + Mb + \dots + Mm$.

Само собою разумѣется, что дѣлямъ непонятны такія символическія обозначенія, а потому съ ними должны быть ли приемы прѣдены путемъ болѣе нагляднымъ, на которомъ не считаемъ необходимымъ останавливаться по еіо очевидности.

§ 22. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ на многозначныя прѣдставляетъ болѣе техническихъ трудностей, — въ особенности при крупныхъ дѣлителяхъ. Дѣлямъ (да и не только дѣлямъ, но и взрослымъ, не достигшимъ болѣе или менѣе опытности въ вычисленіяхъ) наиболѣе трудностей прѣдставляетъ необходимость „задаваться“ цифрою частнаго. Пусть требуется раздѣлить 11205 на 1245; не только ребенокъ, но, поворяемъ, и довольно опытный счетчикъ не сразу скажетъ цифру частнаго и даже не определитъ съ перваго взгляда — раздѣлится ли первое число на второе. Но это не должно помѣшать выясненію общаго пріема определенія частнаго и сущности этого пріема. Сущность этого пріема состоитъ въ равномерномъ закругленіи дѣлителя и дѣлямаго. Такъ въ нашемъ примѣрѣ, вышній прѣдѣлъ цифры частнаго определѣется такъ: 11205, раздѣленный на 1245 единицъ, не могутъ дать болѣе, чѣмъ 11200, раздѣленный на 1200, а 11200, раздѣленный на 1200, не могутъ дать болѣе, чѣмъ сколько дадутъ 11000, раздѣленный на 1000, т. е. не можетъ дать болѣе 11-ти. Хотя мы это и знали ранѣе, но это число (11) показываетъ намъ, что мы имѣемъ дѣло съ довольно крупнымъ частнымъ. Насколько справедливо это разсужденіе, можно судить по тому, что если бы первая цифра дѣлителя была 2, то и тогда мы получили бы въ частномъ число, близкое къ 5-ти; здѣсь, стало быть, имѣемъ число, болѣе 5-ти.

Само собою разумѣется, что подобныя разсужденія кажутся только сначала очень трудными для дѣтскаго пониманія; но нельзя отрицать, что техническихъ трудности дѣленія далеко не могутъ быть пренебрегаемы при первоначальномъ обученіи.

§ 23. Въ заключеніе считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ по поводу нѣкоторыхъ условныхъ выраженій и нѣкоторыхъ примѣненій четырехъ дѣйствій къ частнымъ случаямъ. Къ числу этихъ условныхъ выраженій принадлежатъ выраженія: „на столько-то болѣе или менѣе“, „увеличить“ и „уменьшить“ число „на столько-то“, „во столько-то разъ болѣе или менѣе“, „увеличить“ и „уменьшить число во столько-то разъ“ и т. п. Ознакомленіе дѣтей съ этими выраженіями и пріученіе ихъ къ примѣненію случаевъ, характерныхъ этими выраженіями, отнесено нами подъ самый конецъ первоначальнаго курса ариметики. Ранѣе усвоенія дѣльми самаго смысла и цѣли арифметическихъ дѣйствій, ранѣе пріобрѣтенія ими умѣнія справляться съ техническими трудностями устнаго и письменнаго производства, невозможно основательное усвоеніе ими этихъ выраженій

и примененіе дѣйствій даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ, при которыхъ употребительны эти выраженія. (I, 861—971). Само собою разумѣется, что и при проработкѣ этихъ новыкъ, хотя и чисто словесныхъ элементовъ курса, необходимо прибѣгать къ нагляднымъ пособіямъ и почти необходимо выходить изъ задачъ. Но не должно забывать, что эти элементы выходятъ за предѣлы рамокъ, назначенныхъ нами первоначальному обученію.

По нашему крайнему разумѣнію первоначальное обученіе ариѳметикѣ въ намѣченныхъ нами предѣлахъ уместно: 1) въ приготовительныхъ классахъ средн. учебн. завед., въ коихъ эти классы имѣются; 2) въ школахъ, приготовляющихъ дѣтей къ первому классу средн. учебн. завед., и при домашнемъ обученіи, преслѣдующемъ ту же цѣль, и 3) въ высшихъ классахъ тѣхъ учебныхъ заведеній, которыхъ курсъ выше курса начальной народной школы съ трехлѣтнимъ курсомъ, какъ то, въ училищахъ городскомъ, двухклассномъ и т. п.

Для выясненія значенія условныхъ выраженій въ родѣ вышеупомянутыхъ, отъ учащаго не требуется никакихъ особенныхъ пріемовъ, если онъ къ нимъ приступитъ не слишкомъ рано. Только въ случаѣ большой поспѣшности и игнорированія принципа, по которому учащемуся въ каждый моментъ обученія должно быть задаваемо только по одной работѣ за-разъ, можетъ оказаться, что дѣтямъ недоступно пониманіе разницы между значеніемъ выраженій: „на столько-то“ и „во столько-то разъ больше“ и т. п.

Г л а в а V.

Ариѳметика какъ предметъ общаго и спеціального обра- зованія.

§ 1. Курсы ариѳметики: первоначальный—цѣлыхъ чиселъ, полный прак- тическій и повторительный теоретическій. — § 2. Содержаніе полнаго практическаго курса ариѳметики. — § 3. О роли задачъ при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики. — § 4. О памятныхъ пособіяхъ при прохожденіи полнаго практическаго курса ариѳметики. — § 5. Изуче- ніе нумераціи. — § 6. О сложеніи цѣлыхъ чиселъ. — § 7. О вычитаніи. — § 8. Объ умноженіи. — § 9. О дѣленіи — § 10. Объ измѣненіи нѣсколькихъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненія данныхъ. — § 11. О случаяхъ, допу- скающихъ сокращеніе въ вычисленіяхъ. — § 12. Употребленіе скобокъ. — § 13. О рѣшеніи задачъ ариѳметическихъ и алгебраическаго характера. — § 14. Преобразование именованныхъ чиселъ и четыре дѣйствія надъ ними. — § 15. О задачахъ на вычисленіе времени и геометрическихъ. — § 16. Уче- ніе о дѣлителяхъ и соприкасающихся съ ними ученія — § 17. Понятіе о дробяхъ, обозначеніе ихъ, измѣненіе и преобразованіе ихъ. — § 18. На- хожденіе частей цѣлаго и цѣлаго по частямъ — § 19. Четыре дѣйствія надъ обыкновенными дробями. — § 20. О десятичныхъ дробяхъ и дѣйствіяхъ надъ ними. — § 21. О периодическихъ дробяхъ. — § 22. Объ отношеніяхъ и пропорціяхъ. — § 23. Задачи на простое и сложное тройное правило. — § 24. Задачи на правило процентовъ и учета векселей. — § 25. Задачи на правило пропорціональнаго дѣленія и сѣшенія. — § 26. Задачи на правило сроковъ. — § 27. О непрерывныхъ дробяхъ. — § 28. Употребленіе учебника при прохожденіи курса ариѳметики въ низшихъ классахъ среднихъ и др. учебныхъ заведеній, близкихъ по своему курсу ариѳметики къ среднимъ. — § 29. О дополнительныхъ статьяхъ по предмету ариѳметики. — § 30. Статьи объ измѣреніи, числѣ и нумераціи. — § 31. Статья о четырехъ дѣйствіяхъ надъ числами. — § 32. Статьи о дѣлителяхъ, первоначальныхъ числахъ, общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ числѣ. — § 33. Статья о дробяхъ. — § 34. Статья о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ. — § 35. Статья о сокращенныхъ вычисленіяхъ. — § 36. Курсъ ариѳметики въ учительскихъ семинаріяхъ, институтахъ, реальныхъ, коммерческихъ и техническихъ училищахъ. — § 37. Методика ариѳметики какъ педагогиче- ская дисциплина въ курсѣ учительскихъ семинаріи и институтовъ. — § 38. Польза, которую принесло бы введеніе математики преподаванія различныхъ отраслей низшей математики въ число обязательныхъ предметовъ от- дѣленія физико-математическихъ наукъ математическихъ факультетовъ.

§ 1. Первоначальный курсъ ариѳметики представляетъ собою основу и фундаментъ всего курса ариѳметики, подлежащаго про- хожденію въ ср. уч. зав., хотя онъ и заключаетъ въ себѣ только простѣйшія ученія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами въ самыхъ простыхъ случаяхъ ихъ примѣненія. Мы умышленно не употреби- лемъ при этомъ термина „проведетическій курсъ ариѳметики“, такъ какъ съ этимъ терминомъ связаны нѣкоторыя предваде- нія, совершенно чуждыя идеямъ выше развитаго и разсмотрѣн

наго первоначальнаго курса. Цель этого послѣдняго заключается: 1) въ методической выработкѣ въ умѣ учащихся вѣрныхъ и правдивыхъ идей о счетѣ и четырехъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, и 2) въ обогащеніи ихъ совокупностью такихъ первоначальныхъ ариѳметическихъ представленій, на почвѣ которыхъ могла бы быть впоследствии построена система ариѳметическихъ понятій и ученій, возможно близкая къ системѣ учебника практической ариѳметики, — системѣ, несомнѣнно содержащей въ себѣ нѣкоторыя научно-теоретическія идеи и перспективы.

Курсъ ариѳметики, подлежащій прохожденію въ низшихъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, согласно тѣмъ требованіямъ, которыя къ нему могутъ быть предъявлены съ педагогической и практической точекъ зрѣнія и которыя къ нему на самомъ дѣлѣ представляются учебными планами преподаванія интересующаго насъ предмета въ заведеніяхъ М. П. Пр., — этотъ курсъ содержитъ въ себѣ ученіе объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ во всемъ его объемѣ, но безъ изложенія всѣхъ теорій во всей ихъ полнотѣ. Стоитъ разсмотрѣть программу курса I и II классовъ классическихъ гимназій, чтобы убѣдиться въ справедливости выше сказаннаго. Программы эти гласятъ:

„Нумерация десятичной системы. Повтореніе дѣйствій надъ цѣлыми отвѣченными числами. Таблица русскихъ мѣръ наглядно и съ объясненіемъ. Раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ. Дѣйствія надъ составными именованными числами. Устное и письменное рѣшеніе задачъ. Ознакомленіе съ простѣйшими дробями.“

„Признаки дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10. Разложеніе чиселъ на простые множители. Дѣйствія надъ обыкновенными и десятичными дробями какъ отвѣченными, такъ и именованными. Периодическія дроби. Ознакомленіе учащихся съ метрическою системою мѣръ. Общія отношенія и пропорціи. Устное и письменное рѣшеніе задачъ, относящихся ко всему пройденному.“

Курсъ перваго класса, очевидно, не содержитъ никакихъ особенно затруднительныхъ теоретическихъ элементовъ; не много теоретическихъ элементовъ содержитъ также и курсъ втораго класса: въ немъ даже не упомянуты теоріи общаго наибольшаго дѣлителя, наименьшаго кратнаго числа и первоначальныхъ чиселъ. Вообще и слова „теорія“ не находимъ въ программахъ этихъ двухъ классовъ, что убѣждаетъ насъ вмѣстѣ съ тѣмъ необыкновенно простымъ взглядомъ на курсъ, которымъ проникнуты эти программы, что курсъ низшихъ классовъ ср. уч. зав. не долженъ быть загромождаемъ теоретическими элементами интересующаго насъ предмета обученія. Что касается курса третьяго класса, то его составляютъ ученія о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ, о которыхъ рѣчь будетъ ниже и которыя, во всякомъ случаѣ, не вносятъ въ курсъ низшихъ классовъ ничего существенно новаго въ смыслѣ ариѳметическихъ теорій.

Нельзя не признать по этому, что выше охарактеризованный взгляд официальной программы, как мы о том не раз имѣли случай говорить въ некоторыхъ своихъ работахъ, весьма значительно расходится со взглядами большинства составителей учебниковъ и учебныхъ пособій по предмету ариметики. Большинство гг. составителей учебниковъ склонно вносить въ курсы массу, часто не доступныхъ ученикамъ низшихъ классовъ, теоретическихъ элементовъ, а составители учебныхъ пособій вносятъ въ число задачъ такія, которыя вовсе не относятся ко всему пройденному въ низшихъ классахъ, напр., задачи алгебраическаго характера, методы рѣшенія которыхъ лежатъ за пределами практическаго курса ариметики. Мы лично всегда были склонны смотрѣть на курсы ариметики низшихъ классовъ ср. уч. зав., какъ на курсы далеко не теоретическій, и неоднократно въ своихъ работахъ обращали вниманіе на самую цѣль и характерныя особенности этого курса. Цѣль эта заключается въ полномъ и сознательномъ усвоеніи всѣхъ, если можно такъ выразиться, ариметическихъ умѣній, не выходящихъ за пределы четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами; характерная его особенность заключается въ отсутствіи въ немъ ариметическихъ теорій въ ихъ научной формѣ.

Что же касается внесенія теоретическихъ элементовъ въ общій ариметическій курсъ учащихся, то оно наиболее уместно при такъ называемомъ повтореніи ариметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. Этого взгляда легъ въ основу нашего „Методическаго сборника ариметическихъ задачъ“ (ч. II), а равно „Учебника ариметики съ приложеніемъ дополнительныхъ статей по предмету ариметики“. Повторительный теоретическій курсъ ариметики (отнесенный въ нашемъ Учебникѣ въ отдѣлъ „дополнительныхъ статей“) долженъ въ себѣ содержать изложеніе всѣхъ теорій, лежащихъ въ основѣ ариметики-искусства, и долженъ по отношенію къ курсу ариметики низшихъ классовъ играть приблизительно ту же роль, какую этого послѣдній играетъ по отношенію къ первоначальному курсу ариметики цѣлыхъ чиселъ.

Такимъ образомъ курсъ ариметики можно различать тройкій: 1) первоначальный, основанія и сущность котораго изложены въ предыдущей главѣ и который долженъ быть учащимся усвоенъ до поступленія въ первый классъ ср. уч. зав., 2) полный практическій, который долженъ быть пройденъ въ низшихъ классахъ средняго учебнаго заведенія, и 3) повторительный теоретическій, подлежащій прохожденію въ одномъ изъ высшихъ классовъ средняго учебнаго заведенія. — Во избѣжаніе недоразумѣній мы должны замѣтить, что въ цѣломъ курсъ какъ наз. начальныхъ (сельскихъ и городскихъ) школъ, а равно двухклассныхъ и другихъ

училищъ, должны болѣе или менѣе совпадать съ полнымъ практическимъ курсомъ ариметики, выше нами охарактеризованнымъ, причемъ курсъ перваго года обученія въ подобиныхъ учебн. зав., конечно, долженъ быть первоначальнымъ *).

§ 2. Въ курсъ ариметики низшихъ классовъ, кромѣ ученій о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, входятъ: ученіе объ именованныхъ числахъ, ученіе о дѣлителяхъ, о дробяхъ обыкновенныхъ и десятичныхъ, объ отношеніяхъ и пропорціяхъ и, наконецъ, о такъ называемыхъ тройныхъ правилахъ.

Ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами должно быть пройдено во всемъ своемъ объемѣ, со всею терминологіею ихъ и въ примѣненіи къ рѣшенію какъ простыхъ, такъ и сложныхъ чисто-арифметическихъ (а по обычаю—и алгебраическихъ) задачъ. Хотя эти ученія не могутъ быть пройдены въ низшихъ классахъ со всею аппаратурою аксіомъ, теоремъ и слѣдствій, характеризующимъ то же ученіе въ теоретическомъ курсѣ, но опредѣленія въ этомъ курсѣ тѣмъ не менѣе должны отличаться совершенною научностію и точностію.

Ученіе объ именованныхъ числахъ представляетъ собою не иное что, какъ только примѣненіе ученій о дѣйствіяхъ надъ отвлеченными числами къ случаямъ, когда величины выражены въ видѣ именованныхъ чиселъ. Существенно новыхъ элементовъ ученіе объ именованныхъ числахъ не представляетъ. Даже болѣе того: весь курсъ именованныхъ чиселъ можно разсматривать какъ рядъ задачъ чисто-арифметическихъ, разрешаемыхъ съ помощью весьма простыхъ рассужденій и посредствомъ четырехъ дѣйствій надъ числами отвлеченными. Дѣйствительно: тѣ преобразованія именованныхъ чиселъ, которыя извѣстны подъ именами раздробленія и превращенія именованныхъ чиселъ, представляютъ собою весьма незамысловатыя примѣненія ученій объ умноженіи и дѣленіи чиселъ отвлеченныхъ; что же касается четырехъ дѣйствій надъ составными именованными, то они представляютъ собою тѣ же дѣйствія надъ числами отвлеченными, осложненныя необходимостію прибѣгать при этомъ иногда къ раздробленію (при вычитаніи и дѣленіи составныхъ именованныхъ чиселъ) и къ превращенію (при сложеніи и вычитаніи ихъ).

Совсѣмъ инымъ характеромъ отличаются тѣ статьи о цѣлыхъ числахъ, которыя въ учебникахъ обыкновенно предшествуютъ ученію о дробяхъ: эти статьи представляютъ собою осколки такъ называемой Теоріи чиселъ и при томъ не находятся въ явной зависимости отъ ученія о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми чи-

* Ср. „Методика ариметики, съ приложеніемъ Сборника упражненій по арифметикѣ для учащихся“, составленную нами для учителей преимущественно варшавскихъ школъ (М. 1886).

слами: и методы здѣсь, и руководящія идеи совершенно особенны. Нѣкоторыя изъ этихъ статей находятся въ тѣснѣйшей связи съ принятою системою нумераціи и такими свойствами арифметическихъ функций (суммы, разности, произведенныя и частнаго), которыя не входятъ въ ученіе о четырехъ дѣйствіяхъ: таково ученіе о признакахъ дѣлимости чиселъ. Другія статьи, напротивъ, совершенно не зависятъ отъ системы счисленія и касаются, такъ сказать, самой природы чиселъ: таковы ученія о первоначальныхъ числахъ, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чиселъ. Статьи обоихъ родовъ не могутъ быть, по слишкомъ понятнымъ причинамъ, пройдены въ низшихъ классахъ съ надлежащею, въ научномъ отношеніи, полнотою и точностью. Полагно поэтому, что охарактеризованные статьи проходятся тоже только практически, кромѣ того этимъ объясняется также причина, почему въ „Учебныхъ планахъ предметовъ, преподаваемыхъ въ классическихъ гимназіяхъ“ всѣ эти статьи включены всего подъ двѣ рубрики: „признаки дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 и 10“ и „разложене чиселъ на простые множители“ и почему въ „Планахъ“ ничего не сказано о *теоріяхъ* общаго наибольшаго дѣлителя, наименьшаго кратнаго, первоначальныхъ чиселъ и т. п.

Ученіе объ обыкновенныхъ дробяхъ тѣснѣе соприкасается съ ученіемъ о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, чѣмъ помянутыя ученія изъ теоріи чиселъ. Хотя въ основѣ ученія о дробяхъ лежитъ вообще независимое отъ ученія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами понятие о доляхъ единицы, но дальнѣйшее развитіе ученія о дробяхъ вытекаетъ изъ ученія о полномъ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленія одного цѣлаго числа на другое, и о дѣйствіяхъ надъ числами цѣлыми. Что же касается ученія о дробяхъ десятичныхъ, то оно всецѣло основано на ученіи о нумераціи и дѣйствіяхъ надъ цѣлыми отвлеченными числами. Только ученіе о періодическихъ дробяхъ не можетъ быть изложено со всей научной строгостью, съ какою оно можетъ быть изложено въ теоретическомъ курсѣ, свободно располагающемъ всѣми ученіями (изъ теоріи чиселъ и изъ теоріи предѣловъ), которыя необходимы для научнаго обоснованія теоріи періодическихъ дробей.

Что касается ученія объ отношеніяхъ и пропорціяхъ, то оно выходитъ за предѣлы чисто арифметическихъ ученій, а отличается скорѣе аналитико-алгебраическимъ характеромъ. Арифметикѣ, строго говоря, чужды ученія о формулахъ и уравненіяхъ, а отношенія и пропорціи, въ особенности послѣднія, представляютъ собою не иное что какъ именно нѣкоторыя формулы, обладающія извѣстными аналитическими свойствами. Небезоснователенъ поэтому тотъ взглядъ на ученія объ отношеніяхъ и пропорціяхъ,

по которому эти учения неуместны в курсе арифметики. Этому взгляду держится большинство германских педагогов-математиков, а равно и многие русские авторы (напр., Гурьев, Мазинг). Но во всяком случае, если когда-либо эти учения и будут исключены из курса арифметики, то от этого нисколько не проиграет учение о такъ наз. тройныхъ правилахъ, такъ какъ всё безъ исключения задачи на эти правила разрешаются съ помощью способа приведенія къ единицѣ гораздо проще и естественнѣе, чѣмъ съ помощью пропорцій. Впрочемъ, нельзя не признать, что самое учение о пропорціяхъ и рѣшеніе задачъ на тройныя правила съ помощью пропорцій заключаютъ въ себѣ не мало моментовъ, могущихъ сыграть нѣкоторую роль въ развивательномъ отношеніи.

§ 3. При первоначальномъ обученіи арифметикѣ задачи, какъ мы видѣли выше, играютъ очень важную роль основного руководящаго начала, дающаго почву для выработки въ умѣ учащихся, путемъ нагляднымъ и психологическимъ, тѣхъ понятій, которыя составляютъ предметъ дальнейшей логической работы надъ ученіями арифметики. Кроме того мы видѣли, что при первоначальномъ обученіи главнѣйшимъ образомъ важны задачи простые изъ числа чисто арифметическихъ. При прохожденіи полного практическаго курса арифметики въ низшихъ трехъ классахъ ср. уч. зав. роль задачъ не исключительно наглядно-психологическая: хотя очень многія понятія подлежатъ и въ этомъ курсѣ выработкѣ именно съ помощью простыхъ задачъ, но за-то въ немъ не могутъ быть также игнориремы: 1) задачи съ болѣе или менѣе искусственными выраженіями и условіями, 2) задачи на примѣненіе приобретенныхъ логическихъ путемъ ученій арифметики, и 3) задачи, въ чисто практическіи условія которыхъ облечены тѣ или другія теоретическія ученія арифметики. Кроме того силою обычая установлены также упражненія въ не-алгебраическомъ рѣшеніи въ низшихъ классахъ задачъ строго-алгебраическаго характера. При этомъ, какъ это само собою разумѣется, является потребность въ *методической* проработкѣ задачъ, преслѣдующей стою-методическія цѣли. Позволяемъ себѣ замѣтить, что при составленіи нами ч. II нашего „Методическаго Сборника арифметическихъ задачъ для ср. уч. заведеній“ пинущимъ эти строки руководило стремленіе къ строго-методическому расположенію задачъ и упражненій. Таковое ихъ расположеніе даетъ возможность учащему выполнить то требованіе разумной педагогики, по которому „обучать другихъ чему нибудь значитъ показать имъ, что они должны сдѣлать для того, чтобы этому научиться“ *).

*) Да позволено намъ будетъ здѣсь замѣтить, что въ обонхъ частяхъ нашего „Методическаго Сборника“ задачи одного рода соединены вмѣстѣ и что учащему не трудно въ нихъ разыскать задачи одного типа, какъ

Но, строго говоря, детям очень трудно, если не невозможно, основательно научиться чему-нибудь, не поставив их предварительно в условия, психологически необходимые для выработки в них умственных понятий и логических навыков.

Само собою разумеется, что руководящее при проработке задач может быть только методическая точка зрения; остальные же точки зрения должны играть второстепенную роль. Исполнив вика как-то установилось совмещение с обучением арифметик решение задач более или менее доступного детского пониманию содержания. Отсутствие у некоторых из гг. преподавателей и составителей учебников и задачникков вполне ясной идеи как о главнейшей роли задач было причиною того, что арифметика проходила часто, да и повыше иногда проходила, как бы сама по себе, а задачи решаются сами по себе, и что связь между курсом и задачами часто пребывала и доселе иногда пребывает лишь чисто внешняя. В большинстве, чтобы не сказать—во всех задачниках, если не считать весьма почтенных работ г. Воронова, г. Гики и некоторых других, методическая связь задач с проходимыми в данный момент учениями арифметики почти совершенно игнорируется, и если из всех употребительных задачникков один отличается чем-нибудь особенно от другого, так чаще всего только степенью хаотичности пагроможденного в нем материала. Одни, сторонники так называемого „изучения“ чисел свергают

как число задач каждого типа у нас есть число непременно круглое (5, 10, 15, 20 и т. д.) и так как задачи смешанные либо совсем выделены в отдельную рубрику, либо помещены в конце какого-либо отдела. Мы считали делом своим позаботиться преимущественно о методическом распределении задач, возложив на учащего заботу о том, чтобы делом не принесла вреда такая группировка задач по типам, и тем самым мы надеемся в этом отношении на учащего, что вред, который может принести сказанная группировка, весьма призрачен, если от учащего постоянно требовать сознательного, с полным разумеется, каждый раз мотивируемого, применения данного арифметического учения. Кроме того да будет нам позволено здесь же заметить, что наши задачи алгебраического характера выделены в отдельные рубрики и что они тоже расположены по типам, а не как пошло. Считаю также своим принятым и несомненным долгом заявить, что ни с чем несравнимую услугу нам принесли, в деле предпочтения принятой нами методике целесообразных задач другим методам обучения арифметик, бесчисленные достоинства К. Д. Кузнецова, авторитетными советами которого мы неоднократно пользовались также и при составлении некоторых других сочинений наших. Но само собою разумеется, что при этом вся ответственность за качества наших сочинений падает целиком, конечно, исключительно на автор и что только хорошие качества их, буде таковы есть в наших работах, должны быть обеспечены добрыми советами и указаниями лиц, советами и мнениями которых мы пользовались или были наведены на некоторые из высказываемых и проводимых нами взглядов.

учащаго и учащагося въ хаосъ, составленныи изъ различныхъ дѣйствій, и думаютъ, что лучшемъ, освѣщающимъ этотъ хаосъ, является величина числа. Другіе, составители задачниковъ для гимназій и др. среднихъ учебныхъ заведеній, не увлекающіеся этимъ принципомъ, иногда ввергаютъ насъ въ конгломератъ такихъ задачъ съ условиями, которыя изошряютъ находчивость только немногихъ учениковъ, наиболѣе и особенно способныхъ къ разсужденіямъ о величинахъ и ихъ взаимныхъ отношеніяхъ, но при этомъ ни мало не приносятъ осязательной пользы болѣшинству, стремящемуся къ усвоенію ариометики, какъ искусства вычисленій. Эти составители думаютъ, что они своими рубриками: „задачи на сложеніе“, „задачи на всѣ дѣйствія“ и т. п., учащему даютъ руководящую идею при выборѣ задачъ, и не замѣчаютъ при этомъ, что въ предлагаемой ими системѣ почти нѣтъ никакого луча свѣта. Третьи думаютъ волюнѣ удовлетворить насъ исключительно количествомъ задачъ и ищутъ по англійскимъ, французскимъ и др. источникамъ задачи, которыхъ „не поднять и не понять“, какъ выразился одинъ нашъ ученый по поводу наиболѣе распространеннаго въ это время объемистаго учебника по предмету геометріи. Эти послѣдніе, вѣроятно, думаютъ, что не въ методическомъ расположеніи, а въ количествѣ ихъ вся сила. Легко понять, что и этотъ взглядъ не волюнѣ согласенъ съ истинно-педагогическими и научными требованіями, которымъ всякій сборникъ арифметическихъ задачъ долженъ удовлетворять, хотя не подлежитъ сомнѣнію, что задачникъ долженъ представлять достаточный выборъ упражненій. Наконецъ, четвертые думаютъ, что главная сила въ томъ словесномъ матеріалѣ, который дается въ этихъ задачникахъ. Къ числу подобныхъ сочиненій принадлежатъ, кромѣ сочиненій г. Лубенца, проф. Бугаева и Верещагина, также почтенный трудъ гг. Арбузова, Мининныхъ и Назарова. Изъ упомянутыхъ составителей нѣкоторые (въ томъ числѣ и г. Лубенецъ) опираются на указанный выше психологическій фактъ попутнаго усвоенія памятью какъ-разъ тѣхъ данныхъ, на усвоеніе которыхъ менѣе всего обращалось вниманіе. Руководясь этимъ, упомянутые составители берутъ числовыя данныя для своихъ задачъ изъ области различныхъ наукъ, дабы чѣмъ такимъ образомъ невольнo усвоили себѣ тѣ или другія интересныя числовыя данныя. Это было бы волюнѣ достойный вниманія взглядъ, если бы цѣль арифметическихъ задачъ не была цѣлью волюнѣ специальною, если бы, далѣе, числовыя данныя на самомъ дѣлѣ легко запоминались независимо отъ нашей воли и отъ нашего вниманія, и если бы, наконецъ, сторонники этого взгляда не слыхкомъ преувеличивали важность запоминанія (хотя бы и попутнаго) числовыхъ данныхъ изъ разныхъ областей знанія. Къ сожалѣнію, числовыя данныя вовсе не легко запоминаются: для ихъ запомина-

ни требуется специальная память, къ развитію которой вовсе не должны стремиться никакіе сборники арифметическихъ задачъ, такъ какъ цѣль этихъ пособій—обученіе ариметикѣ, а не усвоеніе (безсознательнымъ путемъ случайнаго запоминанія или же сознательнымъ — выучиваніемъ) числовыхъ данныхъ изъ разныхъ областей знанія. Числовой матеріалъ арифметическихъ задачъ — волюнті второстепенная частности, которой нѣкоторыми придается столь большое значеніе вслѣдствіе не довольно правильнаго взгляда на роль арифметическихъ задачъ какъ таковыхъ. Это — одна изъ тѣхъ вышнихъ особенностей нѣкоторыхъ задачниковъ, которымъ слѣдуетъ приписывать гораздо меньшее значеніе, чѣмъ какому обладаютъ: слогъ и изложеніе задачъ, ихъ расположеніе и методическая послѣдовательность и т. д. Важно, правда, чтобы области, изъ коихъ берется матеріалъ для задачъ, были доступны пониманію учащихся, чтобы числовые данныя не противорѣчили истинѣ и дѣйствительности, чтобы, напримѣръ, фунтъ сахару не стоилъ 2 руб., чтобы разстояніе отъ Москвы до Петербурга не равнялось двумъ тысячамъ верстъ, чтобы отецъ не былъ старше своего сына на 6 лѣтъ, и т. д. Но отъ этихъ требованій здраваго смысла до приписыванія числовому составу задачи какого-то особеннаго, частью мистическаго (бар. Корфъ), частью научно-практическаго значенія (гг. Лубенецъ и ми. др.) очень далеко *).

Итакъ, роль задачъ при прохожденіи полнаго практическаго курса арифметики должна быть, да чаще всего и бываетъ преимущественно методическая. Что касается роли задачъ при повторительномъ теоретическомъ курсѣ, то она, сравнительно, не значительна: здѣсь гораздо важнѣе упражненія въ доказательствѣ теоремъ, подобныя тѣмъ, которыми снабжены сочиненія Бертрана,

*) Усвоеніе на-память числовыхъ данныхъ едва ли не требуетъ спеціальной памяти, иногда не зависящей даже отъ научной спеціальности даннаго лица. На-ряду съ Эмилемъ Дюбуа-Ремономъ (проф. физиологій Берлинскаго университета), помнящимъ наизусть массу числовыхъ данныхъ изъ астрономіи, химіи, физики, географіи, исторіи и литературы, возможно, чтобы даже превосходящій математикъ помнилъ спрямленіе окружности (число π) только съ двумя цифрами послѣ запятой, а натуральное основаніе — съ семью цифрами, несмотря на то, что спрямленіемъ окружности оль пользовался (именно мимоходомъ) несравненно чаще, чѣмъ натуральнымъ основаніемъ. Вѣроятно, и среди читателей этихъ строкъ не мало найдется лицъ, которые не тверды въ таблицѣ мѣръ аптекарскаго вѣса и не помнятъ величины стадій и греческаго таланта, несмотря на то, что они десятки разъ мимоходомъ читали о взаимномъ отношеніи единицъ аптекарскаго вѣса и о величинѣ стадій или таланта. Обученіе арифметикѣ и рѣшеніе арифметическихъ задачъ не должны и, кажется, даже не могутъ преслѣдовать усвоеніе дѣтymi цифровыхъ данныхъ, которыя имъ, можетъ быть, никогда не понадобятся. Но, кромѣ того, едва ли полезное вліяніе на умъ учащагося должно оказать затроможеніе условій сравнительно простыхъ задачъ чуждыми умственному горизонту его цифровыми и словесными данными.

Серре (въ пер. г. Юденича) и цѣк. другія. Къ сожалѣнію, нельзя не замѣтить, что по недостатку времени подобнымъ упражненіямъ не можетъ быть отведено достаточно мѣста въ повторительномъ теоретическомъ курсѣ ариометики.

§ 4. Прежде чѣмъ перейти къ детализированнымъ методическимъ указаніямъ относительно различныхъ статей полнаго курса ариометики низшихъ классовъ, считаемъ необходимымъ сдѣлать общее замѣчаніе на-счетъ употребленія при прохожденіи этого курса наглядныхъ пособій. Эти послѣднія надо различать двухъ родовъ: 1) пособія, преслѣдующія цѣль ознакомленія дѣтей съ разными единицами мѣръ, и 2) пособія, помогающія проработкѣ тѣхъ или иныхъ статей курса. О пособіяхъ перваго рода должно замѣтить, что дѣти должны имѣть о нѣкоторыхъ единицахъ мѣры непрехѣнно наглядное представленіе: таковы величина фута, аршина, дюйма, вершка и т. под. Известно, что большинство взрослыхъ не обладаютъ такимъ глазомѣромъ, чтобы безошибочно отложить на бумагѣ или на веревочкѣ длину аршина, фута, дюйма, вершка. Было бы поэтому ошибочно требовать отъ дѣтей подобнаго глазомѣра, и не объ его развитіи должно заботиться при обученіи ариометикѣ. Но необходимо, чтобы дѣти изъ опыта знали — что больше: футъ или аршинъ, дюймъ или вершокъ, и знали это не только теоретически и благодаря своей памяти, но также и благодаря наглядному ознакомленію съ этими мѣрами. Желательно было бы, съ практической точки зрѣнія, подобное ознакомленіе ихъ также и съ величиною метра и десятиметра, съ вѣсомъ фута, лота и т. и.

Что касается наглядныхъ пособій втораго рода, преслѣдующихъ цѣль лучшаго усвоенія статей ариометики, то наилучшимъ изъ нихъ должно считать обыкновенные русскіе счеты. Очень полезны счеты такого устройства, чтобы, во 1-хъ, они были значительно больше обычныхъ торговыхъ счетовъ и, 2-хъ, чтобы проволоки различныхъ классовъ были отдѣлены другъ отъ друга болѣе значительнымъ промежуткомъ, чѣмъ проволоки разныхъ разрядовъ одного и того же класса. Такъ называемая „солома“ (снички) тоже могутъ быть небезполезны на всѣхъ ступеняхъ обученія, если въ томъ представляется надобность. За-то употребленіе всѣхъ элементовъ такъ называемаго ариометическаго лица врядъ ли можетъ быть оправдано, такъ какъ бруски и доски, какъ объ этомъ не разъ заявлено выше, не представляютъ собою той аналогіи десяткамъ и сотнямъ, которая желательна при прохожденіи нумераціи и первыхъ двухъ дѣйствій надъ двузвучными и трехъзначными числами, а отдѣльные кубики тоже на врядъ ли могутъ годиться для какихъ либо учебныхъ цѣлей, когда имѣешь дѣло съ учащимися старше 10-ти лѣтъ.

Наконецъ, относительно дробныхъ счетовъ различнаго устройства должно сказать, что они могутъ быть отнесены къ числу пособій, преслѣдующихъ наглядное усвоеніе дѣтми скорѣе величины долей, чѣмъ тѣхъ или иныхъ ученій о дробяхъ. Такъ какъ понятіе дроби и сужденіе о величинѣ различныхъ аликвотныхъ долей (т. е. такихъ дробей, которыхъ числитель равенъ единицѣ) принадлежатъ къ числу понятій и сужденій, вовсе не представляющихъ при своемъ усвоеніи какихъ либо особенныхъ затрудненій, и такъ какъ, кромѣ того, такъ называемые дробные счета довольно дороги, то ихъ пріобрѣтенію для школы пельзя сочувствовать. Болѣе того: гдѣ такіе счета даже имѣются на-лицо, тамъ, думается намъ, учителю тоже чрезвычайно рѣдко приходится къ нимъ прибѣгать. Наилучшимъ нагляднымъ пособіемъ при первоначальномъ усвоеніи дѣтми основныхъ представлений о дробяхъ можетъ служить лентъ или даже лента бумаги, которую можно весьма легко раздѣлить на 2, на 4, на 8 и т. д. частей и которой раздѣленіе на иное число частей тоже можетъ быть, при некоторомъ развитіи глазомера, произведено болѣе или менѣе удачно. Полезно раздать учащимся подобныя ленты разной длины, но это полезно, конечно, вовсе не для упражненія ихъ въ раздѣленіи подобныхъ лентъ по глазомеру (это умѣніе не имѣетъ никакого отношенія къ ариметикѣ), а только для нагляднаго усвоенія ими мысли о возможности подобнаго раздѣленія данной длины на равныя между собою части и самыхъ основныхъ понятій о дробяхъ.

§ 5. Трудности изученія десятичной системы нумераціи могутъ обусловливаться тремя причинами: 1) либо дѣти не усвоили себѣ устнаго счета во всемъ его объемѣ, 2) либо они не научились находить быстро и безошибочно отношеніе между устными и письменными обозначеніями, 3) либо наконецъ для нихъ непонятны двѣ идеи, лежащія въ основѣ десятичной системы нумераціи, а именно идея о единицахъ разныхъ разрядовъ и идея о единицахъ разныхъ классовъ.

Въ первомъ случаѣ дѣтей надо пріучить къ мысли, что тысячи и миллионы (объ остальныхъ классахъ можно сначала умолчать) считаются точно такъ же, какъ единицы простые: это одинъ изъ затруднительнѣйшихъ моментовъ ученія о десятичной нумераціи. Эти упражненія могутъ и должны быть исключительно устными. Въ случаѣ если отношеніе между устной и письменною нумераціею не вполне усвоено учащимися, то надо обратить особенное вниманіе на этимологическую сторону числительныхъ именъ. Система упражненій (причемъ тоже непременно устныхъ) можетъ совпадать съ системою намѣченной въ §§ 1—7 нашего „Учебника ариметики съ приложеніемъ дополнительныхъ

статей по предмету арифметики, для сред. учеб. зав. " М. 1887*). Сначала надо выяснить тождественность натуральных числительных именъ (напр. совокупности словъ „двѣсти пятнадцать“) съ соответствующею совокупностию именъ числительныхъ съ именами существительными (напр. съ совокупностию словъ: „двѣ сотни, одинъ десятокъ и пять единицъ“). Когда это сдѣлано, выясненіе способа обозначенія какого нибудь однозначнаго, двузначнаго или трехзначнаго числа единиць какого либо изъ высшихъ классовъ не представляетъ особенныхъ затрудненій, тѣмъ болѣе, что практически десятичная система нумераціи усвоена дѣтьми до поступленія въ 1-й классъ сред. учеб. зав.—Что касается, наконецъ, усвоенія идеи о разницѣ между разрядомъ и классомъ, то трудности этой идеи только въ такомъ случаѣ значительны, когда все предшествующее этой идее въ ученіи о нумераціи не достаточно основательно усвоено.

Когда все вышеохарактеризованное усвоено, можно приступить къ систематическимъ письменнымъ упражненіямъ въ нумераціи („Мет. Сб.“ ч. II, №№ 1—15). Отъ одной методической ошибки считаемъ долгомъ предостеречь учащаго: отъ предложенія учащимся на этой ступени обученія задачъ на умноженіе и дѣленіе вида: сколько единицъ въ a сотняхъ или b единицахъ какого либо другого разряда и сколько всего единицъ какого либо высшаго разряда содержится въ столькихъ-то единицахъ даннаго низшаго разряда. Задачи этихъ типовъ на данной ступени обученія неумѣстны по причинѣ того, что онѣ не могутъ быть съ достаточною и необходимою точностью разрѣшены учащимся безъ помощи умноженія и кратнаго сравненія.

На интересующей насъ ступени умѣстны задачи, въ которыхъ упоминаются наименьшія и наибольшія числа о данномъ числѣ цифръ (II, 8, 9, 11 и 12) и задачи на распознаваніе—какое изъ данныхъ двухъ чиселъ больше (II, 15). Дѣтей обыкновенно сначала затрудняютъ задачи перваго рода. Поэтому, предложивъ имъ обозначить помощью цифръ, напр., наименьшее пятизначное число, надо, чтобы они (въ случаѣ если они затрудняются) сначала обозначили какое либо пятизначное число. Какъ бы оно мало ни было, надо имъ предложить вопросъ: не могутъ ли обозначить число о пяти цифрахъ, но меньшее даннаго числа. Дальнѣйшій путь понятенъ самъ собою, но должно воздерживаться по возможности долго отъ правила, по которому наименьшее число о данномъ числѣ цифръ есть единица даннаго разряда, а наибольшее—число, каждая изъ цифръ котораго обозначаетъ девять; воздерживаться отъ правила надо для того,

*) Ниже мы ссылки на эту книгу будемъ сокращать такъ: „Уч. ар.“ §§ 1—8, а ссылки на ту или иную изъ „дополнительныхъ статей“ такъ: „Доп. ст.“ II, § 3, и т. п.

чтобы дѣти не слишкомъ механично усвоили себѣ одну изъ особенностей десятичной системы.

При письменномъ и словесномъ (не цифровомъ) обозначеніи чиселъ, само собою разумѣется, необходимо, хотя это и не относится непосредственно къ числу обязанностей учителя ариметики, обращать вниманіе на орфографію числительныхъ чиселъ. Но при этомъ вопросъ (столь любимый некоторыми составителями учебниковъ и преподавателями) о числѣ словъ, необходимыхъ для обозначенія чиселъ отъ единицы до какого либо предѣла, долженъ быть оставляемъ безъ вниманія, какъ вопросъ недостаточно точный и вовсе не арифметическаго характера. Это тѣмъ справедливѣе, что въ вопросахъ такого рода недостаточно твердо установлено—надо ли слова „сто“ и „триста“ считать различными или второе считать происходящимъ отъ словъ „три“ и „сто“, и т. п. О великихъ удобствахъ устной и письменной десятичной нумераціи дѣтямъ, если бы это понадобилось, можно рассказать безъ помощи занимающаго насъ упражненія, не совсемъ арифметическаго, но не достаточно точнаго также и въ лингвистическомъ отношеніи характера.

§ 6. Первоначальное понятіе о сложеніи дѣти составили себѣ до поступленія въ I-й классъ, какова бы ни была ихъ подготовка. Поэтому учащій долженъ только удостовѣриться—насколько оно основательно, понимаютъ ли дѣти, что сложеніе замѣняетъ собою счетъ, знаютъ ли они различные случаи, требующіе примѣненія сложенія, усвоили ли они себѣ до поступленія въ I-й классъ идею о цѣли и производствѣ дѣйствія сложенія надъ разрядными числами, знаютъ ли они таблицу сложенія и т. п. Оказавшіеся при этомъ пробѣлы, конечно, должны быть устранены, причемъ въ одинаковой степени необходимо обращать вниманіе какъ на таблицу сложенія, такъ и на условныя выраженія: увеличить на столько-то, больше на столько-то и т. п.¹

Наибольшее развивательное значеніе имѣютъ при упражненіяхъ въ сложеніи (II, 16—40) слѣдующіе два момента: 1) логическая идея подведенія всѣхъ возможныхъ случаевъ, требующихъ сложенія, подъ одну общую рубрику этого дѣйствія, и 2) идея производства дѣйствія надъ одноименными разрядными числами. Первая идея можетъ быть, при прохожденіи полнаго практическаго курса ариметики, усвоена съ помощью опредѣленія суммы и сложенія, а вторая—путемъ цѣлесообразныхъ и разнообразныхъ способовъ производства сложенія. Въ главѣ этого сочиненія, трактующей о методологій ариметики, надѣемся, съ достаточною ясностію обоснованы логико-методологическія выгоды тѣхъ опредѣленій прямыхъ дѣйствій, которыя опираются на опредѣленія суммы и произведенія. Сложеніе есть только одинъ изъ способовъ (при томъ, конечно, самый цѣлесообразный)

нахожденія числа, которое можетъ быть получено съ помощью счета. Суммою двухъ или нѣсколькихъ называется то число, которое можно получить, *сосчитать*—сколько всѣхъ единицъ въ данныхъ числахъ; ее можно получить съ помощью счета—въ томъ нѣтъ сомнѣнн; но ариѳметика учитъ иному способу ея нахождения: она даетъ возможность обойтись безъ непосредственнаго счета и показываетъ, что хотя сумму можно находить и съ помощью счета, но этого дѣлать *не должно*. При прохожденн курса въ первомъ классѣ можно, если классъ достаточно развитъ, требовать умѣнн подводнтъ всѣ требованн задачъ на сложене подъ то опредѣлене сложенн, по которому сложене есть дѣйствне, цѣль котораго заключается въ отысканн суммы. Пусть, напр., предложена задача (II, 32): „Продавъ нѣкоторую партню товара за 18400 рублей, оптовый торговецъ получилъ 1465 руб. убытку; спрашивается, что стоилъ ему этотъ товаръ?“ Отъ ученика перваго класса можно требовать приблизительно слѣдующаго разсужденн: торговецъ получилъ убытокъ; стало-быть, онъ получилъ за товаръ меньше, чѣмъ сколько онъ самъ за него заплатилъ; сколько же ему стоилъ этотъ товаръ? онъ стоилъ торговцу столько, сколько онъ за него выручилъ, да еще столько, сколько онъ не довыручилъ (сколько онъ понесъ убытку); стало-быть, надо найти сумму двухъ чиселъ 18400 и 1465, т. е. надо сложить эти два числа“. Мы умышленно взяли задачу съ болѣе сложною фавулой, чтобы по этому учащн могъ судить о степени трудности требуемаго примѣненн опредѣленн къ частному случаю; при этомъ само собою разумѣется, что примѣненне опредѣленн въ случаяхъ болѣе простыхъ требуетъ отъ учащагося и болѣе степени пониманн *принципа* сложенн. Ибо учащемуся гораздо понятнѣе позволительность вопроса—почему онъ въ данномъ сложномъ случаѣ хочетъ примѣнить дѣйствне сложенн, чѣмъ позволительность и смыслъ подобнаго вопроса при случаяхъ простыхъ—вродѣ слѣдующаго: „у меня 7 руб., а у тебя 8, сколько у насъ денегъ у обоихъ вмѣстѣ?“ Такъ какъ учащн при этомъ имѣетъ дѣло не съ совершенно малолѣтними дѣтьми, то онъ долженъ озаботиться развитнемъ въ учащихся діалектическихъ прнемовъ, особенное преслѣдованне которыхъ въ первоначальномъ курсѣ недозволительно ни въ какомъ случаѣ.

Что касается трудностей втораго рода, то учащимся должна быть выяснена разница между слѣдующими тремя случаями: а) когда неизвѣстно сколько единицъ въ данной совокупности ихъ, б) когда извѣстно одно изъ слагаемыхъ и мы съ помощью *счета* присоединяемъ къ нему единицы втораго, извѣстнаго слагаемаго, и в) когда мы къ единицамъ одного слагаемаго помощью *сложенн* присоединяемъ единицы другаго. Въ первомъ случаѣ мы ничего не знаемъ и вся наша задача сводится къ счету, въ простому сосчитыванн; во второмъ часть суммы уже

сосчитана и мы, хотя и знаем второе слагаемое, по этимъ зна-
 щемъ не желаемъ или не можемъ пользоваться (ибо, при-
 считывая единицы какого либо числа къ другому, мы величину пер-
 ваго числа оставляемъ безъ вниманія и поступаемъ такъ, какъ
 будто мы ея и не знаемъ); въ третьемъ же случаѣ мы пользуемся
 нашимъ знаніемъ обоихъ чиселъ или же большаго числа ихъ,
 если намъ дано больше двухъ слагаемыхъ; кромѣ того мы поль-
 зуемся нѣкоторыми свойствами суммы, изъ которыхъ важнѣйшее
 состоитъ въ доволтельности разной группировки слагаемыхъ.

При этомъ очень полезно заставить дѣтей производить дѣй-
 ствія: а) въ принятомъ всѣми порядкѣ, б) въ разбѣнку, причемъ
 частныя суммы должны быть прилично подиссываемы одна подъ
 другою съ нулями, в) по порядку отъ единицы къ высшимъ раз-
 рядамъ, но съ приличнымъ зависываніемъ частныхъ суммъ другъ
 подъ другомъ, съ нулями и безъ нулей, и г) по порядку отъ
 единицъ высшаго разряда къ низшимъ, но съ частными суммами
 тоже съ нулями и безъ нулей. Такъ, напр., при нахожденіи
 суммы чиселъ: 275, 487 и 564, приемы вычисленія, кромѣ обыч-
 наго, могутъ быть слѣдующіе:

275	275	275	275	275
487	487	487	487	487
+ 564	+ 564	+ 564	+ 564	+ 564
210	16	16	1100	11
1100	210	21	210	21
+ 16	+ 1100	+ 11	+ 16	+ 16
1326	1326	1326	1326	1326

Болѣе того: очень полезно заставить дѣтей продѣлать сло-
 женіе также и по слѣдующему образцу, показывающему, что
 сложеніе чиселъ имѣетъ цѣлью замѣну ихъ такими слагаемыми,
 изъ которыхъ каждое есть нѣкоторое однозначное число единицъ
 нѣ котораго разряда:

2567	Цѣль всѣхъ этихъ и имъ подобныхъ упражненій заключается въ лучшемъ вычисленіи учащимся самой сущности письменнаго (а также устнаго) способа производства сложенія. Дѣти должны понять, что сущность эта состоитъ въ постепенномъ, послѣдовательномъ нахожденіи цифръ искомой суммы не по величинѣ каждаго изъ слагаемыхъ, а по цифрамъ, обозначающимъ въ этихъ слагаемыхъ единицы одинаковыхъ разрядовъ. Что такое нахожденіе возможно — вытекаетъ изъ самой системы счисленія. Излагаемый же въ учебникахъ ариметики способъ нахожденія этихъ цифръ есть вообще простѣйшій способъ, хотя примѣненіе его въ случаяхъ, когда дано очень много слагаемыхъ, не очень удобно. Въ отношеніи увѣренности въ правильности каждой изъ полученныхъ цифръ должно замѣтить, что при значительномъ количествѣ
3781	
9209	
+ 17356	
23	
190	
1700	
21000	
+ 10000	
113	
800	
3000	
+ 30000	
3	
10	
900	
3000	
+ 30000	
33913	

слагаемых наиболее целесообразен способ постепенного определения и приличнаго записыванія частныхъ суммъ, получаемыхъ отъ сложения единицъ одинаковыхъ разрядовъ („Уч. ар.“ § 14). Противъ подобныхъ упражненій могутъ заявить, что они представляютъ собою одинъ изъ видовъ дѣйствительно незаслуживающаго сочувствія бумагомаранія; но это было бы такъ, если бы мы рекомендовали постоянно производить дѣйствіе сложения такъ, какъ это изображено выше. Мы же рекомендуемъ это упражненіе только для выясненія самой сущности принятаго способа письменнаго производства сложения. Кроме того мы смѣемъ думать, что способъ сложения по частнымъ суммамъ, не смотря на кажущуюся трату бумаги и времени, чрезвычайно удобенъ при подведеніи итоговъ значительнаго числа слагаемыхъ, такъ какъ этотъ способъ допускаетъ очень быструю и надежную проверку интересующаго насъ дѣйствія *).

§ 7. Усвоивъ всю терминологию и въ частности (какъ устного, такъ и письменнаго) производства сложения, можно перейти къ вычитанію. Въ основу ученія о вычитаніи въ курсѣ I-го класса можетъ и должно быть положено опредѣленіе вычитанія какъ дѣйствія обратнаго сложению, т. е. какъ дѣйствія, цѣль котораго заключается въ отысканіи по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ нихъ—другого слагаемаго. Хотя съ точки зрѣнія методологической и примоднейшаго развитія идеи о прямыхъ дѣйствіяхъ, идея объ обращеніи дѣйствія возникаетъ, можетъ быть, и позже идеи о спеціализации сложения, но въ практическомъ отношеніи удобнѣе перейти (для внесенія большаго разнообразія въ занятія) къ ученію о вычитаніи. Первая методическая трудность заключается при этомъ въ пріученіи дѣтей къ подведенію всѣхъ возможныхъ весьма различныхъ по формѣ своей задачъ, требующихъ вычитанія, подъ рубрику одного дѣйствія, всѣхъ случаевъ, когда дано уменьшаемое и вычитаемое, подъ рубрику случаевъ, когда дана сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ нихъ, а требуется найти другое. При этомъ важна слѣдующая особенность дѣйствія вычитанія: въ то время какъ этого дѣйствія безразлично требуютъ оба случая обращенія дѣйствія сложения (т. е. и случай, когда дано первое слагаемое, а требуется найти второе, и случай противоположный), дѣйствительное вычитаніе въ логическомъ (но не арифметическомъ)

*) На вышеизложенной пріемъ подведенія итоговъ по частнымъ суммамъ обратилъ наше особенное вниманіе А. В. Дамскій, завѣдывающій химическою лабораторіею Имп. Техническаго Общества; отъ него же мы узнали, что въ коммерческихъ вычисленіяхъ очень многіе прибѣгаютъ къ этому способу. Вообще считаемъ своимъ приятнымъ долгомъ выразить г. Дамскому свою благодарность за то, что онъ обратилъ наше вниманіе на некоторые сокращенные способы арифметическаго вычисленія.

отношеніи отличается отъ разностнаго сравненія довольно значительно. При дѣйствительномъ вычитаніи дана дѣйствительная сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ величина одного извѣстна, а величина другого подлежитъ отысканію; это дѣйствіе состоитъ *въ отдѣленіи* нѣкоторой извѣстной части даннаго числа. При разностномъ же сравненіи уменьшаемое число не есть дѣйствительная сумма вычитаемаго съ некою разностью; это дѣйствіе сводится къ отдѣленію нѣкоторой не данной части даннаго числа, и при этомъ отдѣляемая часть этого числа не тождественна съ другимъ даннымъ числомъ, а только по величинѣ своей равна ему. Для разъясненія этой логико-арифметической тонкости возьмемъ двѣ задачи: 1) у книгопродавца было 150 экз. нѣ котораго сочиненія; онъ продалъ изъ нихъ 76 экз.; сколько у него осталось? 2) у одного книгопродавца было 150 экз., а у другого— 76 экз. нѣ котораго сочиненія; спрашивается на сколько экземпляровъ этого сочиненія у перваго изъ нихъ было болѣе, чѣмъ у втораго?— Очевидно, что въ первой задачѣ 150 экз. представляетъ собою нѣкоторое *цѣлое*, дѣйствительную часть которой требуется отдѣлить отъ него; во второй же задачѣ число экземпляровъ, принадлежащихъ второму книгопродавцу, очевидно вовсе не представляетъ собою дѣйствительной части числа экземпляровъ, принадлежащихъ первому. Въ первой задачѣ одно число представляетъ собою дѣйствительную сумму двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно дано; во второй же одно число можетъ быть только разсматриваемо какъ сумма двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно *только равно* другому данному числу, но съ нимъ вовсе не тождественно. Въ первой задачѣ отъ одного числа экземпляровъ дѣйствительно требуется отдѣлить нѣкоторое число ихъ; во второй же невозможно отдѣлить число экземпляровъ, принадлежащихъ второму книгопродавцу изъ числа экземпляровъ, принадлежащихъ первому, а можно только отъ одного числа экземпляровъ отдѣлить такое число ихъ, которое равно другому данному числу ихъ.

Ошибочно было бы думать, что подобная тонкость излишня и недоступна уму учащагося: она излишня потому, что она сразу облегчаетъ учащемуся пониманіе самой сущности всѣхъ задачъ, требующихъ вычитанія или разностнаго сравненія; она не недоступна, потому что, благодаря ей, учащійся скорѣе уясняетъ себѣ сходство въ различіи всѣхъ различныхъ случаевъ, требующихъ вычитанія, и потому, что въ ней не заключается ничего такого, чего нельзя было бы выяснитъ съ помощью задачъ. Даже болѣе того: гораздо труднѣе и недоступнѣе учащемуся обыкновенно практикуемое смѣшеніе этихъ двухъ видовъ задачъ на вычитаніе во-едино,—смѣшеніе, которое позволительно только тогда, когда учащійся выяснилъ себѣ ихъ арифметическое сходство, вовсе не очевидное безъ дальнѣйшихъ разговоровъ. (II. 41—80).

Что касается способовъ производства вычитанія, то, кромѣ усвоеннаго дѣлами до поступления въ учебное заведеніе способа должно научить ихъ способу, при которомъ нѣтъ такъ называемаго „займа“ единицъ, а все дѣйствіе совершается съ помощью сложенія. Этотъ послѣдній способъ, къ сожалѣнію, весьма мало распространенъ въ Россіи, хотя (какъ это замѣчено еще Лагранжемъ въ его превосходныхъ лекціяхъ въ Нормальной Школѣ) онъ дѣлаетъ почти невозможными тѣ ошибки въ вычисленіи, которыя дѣлаются при такъ наз. „займѣ“ единицъ. Способъ, интересующій насъ, состоитъ въ томъ, что, начиная съ цифры простыхъ единицъ, мы ставимъ цифру, сумма которой съ цифрой единицъ вычитаемаго даетъ число, единицы котораго равны единицамъ уменьшаемаго; если при этомъ сумма единицъ разности и вычитаемого даетъ въ суммѣ число двузначное, то цифра десятковъ прибавляется къ цифрѣ слѣдующаго разряда вычитаемаго. Точно такъ же поступаютъ съ остальными цифрами. Для большей ясности сдѣлаемъ вычитаніе по этому способу на слѣдующемъ примѣрѣ:

$\begin{array}{r} 5092766 \\ -1123584 \\ \hline 69182 \end{array}$	При этомъ разсуждаемъ такъ: 4 да 2—шесть; 2 пишу и перехожу къ десяткамъ. 8 да 8—шестнадцать, 8 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 5—шесть да 1—семь, 1 пишу и перехожу къ тысячамъ, 3 да 9—двѣнадцать, 9 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 2—три да 6—девять, 6 пишу и перехожу къ сотнямъ тысячъ; 1 да 9—десять, 0 пишу, 1 въ умѣ; 1 да 4—пять, да 0—пять. Такимъ образомъ мы получили въ разности число 69182.
--	--

При некоторомъ навыкѣ этотъ способъ вычитанія приводитъ вѣрнѣе къ правильнымъ результатамъ, чѣмъ обыкновенно практикуемый. Кромѣ этого способа, полезно ознакомить дѣтей съ тѣмъ, при которомъ, когда сдѣланъ „заемъ“ единицы, не уменьшаютъ соответственный разрядъ уменьшаемаго, а увеличиваютъ на единицу тотъ же разрядъ вычитаемаго. При подобномъ вычисленіи выше предложеннаго примѣра разсуждаютъ слѣдующимъ образомъ: 4 изъ 6-ти 2; 8 изъ 16-ти 8; 6 изъ 7-ми 1; 3 изъ 12-ти 9; 3 изъ 9-ти 6. При этомъ для памяти надъ цифрою разряда, изъ котораго дѣлается заемъ, полезно ставить точку. Но этотъ способъ, очевидно, уже не представляетъ никакихъ преимуществъ предъ обыкновенно практикуемымъ и интересенъ только въ отношеніи выясненія дѣтямъ сущности обыкновеннаго способа производства вычитанія и его основной идеи. Что же касается производства вычитанія съ помощью такъ наз. арифметическаго дополненія, то оно наврядъ-ли можетъ привиться въ низшихъ классахъ ср. уч. зав., несмотря на всѣ удобства и преимущества этого способа и на то, что впоследствии, при логарифмическихъ вычисленіяхъ, арифметическое дополненіе играетъ столь важную роль. Хотя Лагранжъ въ одной изъ своихъ лекцій въ Нормаль-

ной Школѣ и придастъ этому способу особенно большое значеніе, но въ I кл. ср. уч. зав. способъ арифметическаго допущенія наврядъ ли умѣстѣнъ.

Когда намѣченное выше съ учащимися проведено основательно, слѣдуетъ обратиться къ сущностямъ задачамъ на оба дѣйствія (II, стр. 13), причемъ особенное вниманіе должно быть обращено на слѣдующіе элементы пройденной части курса: примененіе дѣйствій къ случаямъ прибыли и убытка, пошное ознакомленіе съ искусственными выраженіями („больше и меньше на столько-то единицъ или столько-то единицами“, „увеличить“, „уменьшить“, „превышаетъ“, и т. п.) и чисто-теоретическія задачи (II, 26—30, 56, 61—65 и особенно №№ 66—73).

§ 8. Основное понятіе объ умноженіи дѣли составили собой допущенія въ I и классъ; тѣмъ не менѣе однако учащій долженъ сначала убѣдиться: 1) въ пониманіи дѣльми самой дѣли дѣйствія умноженія и его роли при нахожденіи суммы равныхъ между собою слагаемыхъ, и 2) въ знаніи таблицы умноженія. Когда то и другое знаніе вполне достигнуто, дѣльми, кромѣ обычнаго способа произведенія дѣйствія умноженія, долженъ быть усвоенъ тотъ способъ, который отличается отъ обычнаго тѣмъ, что умноженіе начинается съ единицъ высшаго разряда множителя, а равно и способъ, по которому каждое частное произведеніе каждой цифры множимаго умножается на каждую цифру множителя, приличнымъ образомъ заносывается подъ другіми столбцами, безъ удерживаній въ умѣ высшей цифры этого частнаго произведенія. При этомъ послѣднимъ способомъ получается рядъ двузначныхъ чиселъ отъ умноженія всѣхъ цифръ множимаго на цифру единицъ множителя, за тѣмъ—рядъ двузначныхъ чиселъ отъ умноженія всѣхъ цифръ множимаго на цифру десятковъ множителя и т. д. Полученныя такимъ образомъ частныя произведенія должны быть потомъ приличнымъ образомъ сложены. Кромѣ того, въ особенности при умноженіи на двузначнаго множителя, дѣли должны научиться умноженно, при которомъ все произведеніе пишется сразу, благодаря возможности распознаванія—какія цифры по умноженіи другъ на друга должны дать въ результатѣ десятки, какія—согнѣ, и т. д. При трехзначномъ множителѣ (не говоря уже о многозначныхъ) подобный способъ произведенія умноженія, конечно, весьма затруднителенъ и весьма легко допускаетъ возможность ошибокъ; особенно удобенъ этотъ способъ при умноженіи двузначнаго числа на двузначное же, съ котораго, конечно, и должно начать выясненіе этого способа произведенія умноженія. Цель упражненій въ произведеніи умноженія на дѣльми выше различными способами, конечно, не исключительно развивательная, такъ какъ научить дѣтей въ одинаковой степени умѣло и быстро пользоваться всеми этими способами на впрямь-ли

возможно и необходимо. Усвоить себѣ навыкъ въ быстромъ выполнении умножения дѣли могутъ себѣ только въ томъ случаѣ, если они однакъ изъ нихъ будутъ пользоваться преимущественно предъ другими. Но наиболѣе дѣлсообразнымъ только признать довольно распространенный въ Германіи и Франціи способъ умножения, который отличается отъ принятаго у насъ только порядкомъ беромыхъ цифръ множителя: въ то время какъ у насъ принято начинать съ низшихъ разрядовъ множителя, гораздо дѣлсообразнѣе начинать съ высшихъ его разрядовъ. Еще Лагранжъ замѣнилъ, что такимъ образомъ сразу получаются наивысшія цифры произведенія (что часто важнѣе всего) и что благодаря этому способу особенныя, искусственныя приемы и довольно запутанныя учения совершеннаго умножения (по правилу Ухтрета) становятся почти совершенно излишними. Когда у насъ будетъ рѣчь объ умноженіи десятичныхъ дробей, мы убѣдимся, что великій геометръ былъ совершенно правъ, предпочитая сейчасъ указанный, вѣднѣ естественный, способъ умножения обыкновенно у насъ практикуемому, а равно и способу Ухтрета. Въ лекціяхъ Лагранжа, упоминаемыхъ выше, съ ясностью и опредѣлительностью, какія всегда характеризуютъ изложеніе великаго геометра, говорится: „Прежде всего замѣчу, что при обыкновенномъ способѣ умноженія вычисленіе начинается съ единицъ: единицы множимаго умножаются на единицы множителя и т. д. Но ничто не принуждаетъ насъ начинать непременно съ правой стороны множимаго: столь же дозволительно начинать съ лѣвой его стороны и я, право, не отстаю—почему обыкновенно не предпочитается этотъ послѣдній способъ, который обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, что съ его помощью скорѣе можно опредѣлить высшіе разряды произведенія. При умноженіи большихъ чиселъ насъ по большей части интересуютъ высшіе разряды произведенія, и часто все умноженіе дѣлается съ цѣлю опредѣленія одной или двухъ цифръ наивысшаго разряда его“. *)

*) Цитирую эту беремъ изъ нѣмецкаго перевода Лагранжевыхъ лекцій, которыхъ мы въ оригиналѣ, къ сожалѣнію, не могли достать: Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. Niedermüller. Лpz. 1880. Равнымъ образомъ всѣ ссылки на лекціи Лагранжа, читанныя имъ въ норманской школѣ, сдѣланы нами по этой книгѣ.—Въ трудѣ г. Киселева („Систематическій курсъ ариметики для ср. уч. зав.“ СПб. 1884) на вопросъ о порядкѣ умноженія обращено вниманіе, но преимущество, находящееся въ обычномъ способѣ предъ рекомендуемымъ выше, такъ ничтожно въ сравненіи съ преимуществами послѣдняго, что наврядъ-ли можно согласиться съ почтеннымъ авторомъ. Это преимущество обычнаго способа авторъ видитъ въ трудности зависящая частію отъ произведенія на цифру множителя, слѣдующую за пѣскопылыми нулями этого множителя; но эта трудность весьма легко можетъ быть устранена приписаніемъ къ предшествующему этимъ нулямъ произведенію всѣхъ этихъ нулей.

При прохождении учения о производствѣ дѣйствія умноженія особенное вниманіе учащихся должно быть обращено на тѣ законы, которые лежатъ въ основѣ ученія о производствѣ умноженія, и на то правило, которое, къ сожалѣнію, слишкомъ скоро можетъ обратиться въ безсознательное, механическое умѣніе и по которому умноженіе на единицу какого либо разряда сводится къ приписанію нѣкотораго числа нулей къ множимому. Для того чтобы правило умноженія на единицу какого либо разряда не примѣнялось дѣтьми слишкомъ механически, мало убѣдить ихъ въ логическомъ основаніи этого правила и научить ихъ „доказывать“ это правило: надо разъ-навсегда установить, что при умноженіи на единицу какого либо разряда полезно перемѣщать производителей. Такъ, что $137 \times 10 = 1370$ надо доказывать на томъ основаніи, что

$$137 \times 10 = 10 \times 137.$$

При этомъ встрѣтится необходимость въ цѣломъ рядѣ упражненій, система которыхъ слѣдующая: 1) умноженіе на десять одной единицы любого разряда (правило, соприкасающееся съ нумераціею), 2) умноженіе на 10 любого однозначнаго числа единицъ перваго, втораго и высшихъ разрядовъ, 3) умноженіе на однозначное число единицъ втораго разряда любого однозначнаго числа единицъ другаго разряда, 4) подобная же система упражненій для единицъ третьаго и др. разрядовъ. (II, 81—95). При этомъ на разсматриваемой нами ступени наиболѣе умѣстны упражненія въ опредѣленіи числа всѣхъ единицъ перваго разряда, заключающихся въ данномъ числѣ единицъ разряда высшаго, хотя эти упражненія многими составителями учебныхъ пособій и преподавателями считаются упражнениями въ нумераціи. Этотъ послѣдній взглядъ далеко неправиленъ, потому что напр., вопросъ о томъ сколько единицъ въ 753-хъ сотняхъ, вовсе не вопросъ счисления, а исключительно вопросъ, требующій, для логическаго своего разрѣшенія, примѣненія умноженія.

Но, несмотря на то, что въ самой основѣ всѣхъ способовъ производства умноженія лежатъ исключительно законы перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный этого дѣйствія, въ I кл. ср. уч. зав. наврядъ ли возможна словесная формулировка этихъ законовъ и ихъ формальное примѣненіе къ интересующему учащаго моменту обученія. Гораздо поэтому удобнѣе и цѣлесообразнѣе приучить дѣтей къ сознательному употребленію этихъ законовъ, избѣгая при этомъ ихъ формулировки. При этомъ не слѣдуетъ прибѣгать къ *формуламъ* вродѣ, напр. слѣдующей:

$$300 \times 70 = (3 \times 100) \times (7 \times 10) = (100 \times 10) \times (3 \times 7),$$

которая выражаетъ примѣненіе сочетательнаго закона къ умноженію нѣсколькихъ единицъ одного разряда на нѣсколько единицъ

другого, а надо приучить ихъ къ разсужденіямъ болѣе нагляднымъ продѣ, напр., слѣдующаго: 300 надо взять слагаемымъ 70 разъ; возьмемъ множимое слагаемымъ 10 разъ; получимъ 3000 (это должно быть ранѣе усвоено); возьмемъ еще 10 разъ, и т. д. Научныя формулы для ученика перваго класса слишкомъ отвлечены и недоступны во всей своей логической силѣ, а потому и неумѣстны при прохожденіи и повтореніи съ ними ученія о производствѣ умноженія.

Въ качествѣ задачъ на умноженіе (II, 96—110) можно предложить съ большою пользою для дѣла также и задачи на раздробленіе простыхъ (не составныхъ) именованныхъ чиселъ, которое представляетъ собою не иное что, какъ одно изъ самыхъ обычныхъ и простыхъ примѣненій дѣйствія умноженія. Что же касается задачъ на умноженіе съ какою либо теоретическою идеею, облеченною въ условія задачи, то онѣ наиболѣе умѣстны по усвоеніи дѣйствія дѣленія.—Въ заключеніе этого параграфа позволимъ себѣ сказать нѣсколько словъ объ опредѣленіяхъ. Въ основу опредѣленія сложения, изъ чисто діалектическихъ соображеній (дабы опредѣленіе не было слишкомъ громоздко), лучше всего положить понятіе суммы, а въ основу опредѣленія умноженія—понятіе произведенія. Но каковы бы ни были опредѣленія дѣйствій, они непременно должны быть научны, и усвоеніе ихъ (послѣ надлежащей психологической подготовки учащихся)—*confitio sine qua non* среднеобразовательнаго курса арифметики. Лучше всего прибѣгать къ такимъ опредѣленіямъ, въ которыхъ не предпрѣшается способъ производства дѣйствія. См. „Уч. ар.“ § 11, 16, 21. Въ I кл. ср. уч. зав. дозвоительно при этомъ требовать отъ учащагося умѣнія подводить условія задачи подъ опредѣленія.

§ 9. Самые понятія дѣленія числа на равныя между собою части и кратнаго сравненія двухъ чиселъ не заключаютъ въ себѣ никакихъ особенно трудно усвоиваемыхъ элементовъ: всѣ трудности ученія объ этихъ видахъ дѣйствія дѣленія сконцентрированы, съ одной стороны, въ подведеніи этихъ видовъ дѣленія подъ понятіе объ одномъ дѣйствіи, и съ другой — въ ученіи о производствѣ дѣйствія. Прежде всего дѣти должны до тонкости усвоить себѣ различіе между дѣленіемъ числа на равныя части и сравненіемъ двухъ чиселъ въ кратномъ отношеніи. Лучше всего для этой цѣли прибѣгнуть къ рѣшенію задачъ на кратное сравненіе именованныхъ чиселъ въ такомъ случаѣ, когда требуется узнать сколько единицъ какого либо высшаго наименованія содержится въ данномъ числѣ единицъ наименованія низшаго. (II, 114). Въ *pendant* къ задачамъ этого рода могутъ быть предложены задачи на дѣленіе числа на нѣсколько равныхъ частей. Но при этомъ не должно задавать такіа упражненія, которыя неосильны для учащихся по причинѣ трудности выполненія вычи-

слений: въ этомъ случаѣ получаетъ примѣненіе тотъ обще-педагогическій принципъ, по которому должно избѣгать стеченія нѣсколькихъ трудностей при усвоеніи даннаго ученія. Для внесенія въ ученіе обь интересующихъ насъ видахъ дѣленія дѣленія полезно научить дѣтей, ранѣе усвоенія ими способа производства кратнаго сравненія, сведенію одного изъ этихъ видовъ къ другому; надо добиться того, чтобы задачу на раздѣленіе, напр. 640 на 8 равныхъ частей, дѣти умѣли сводить къ кратному сравненію 640 съ 8-мью и обратно, чтобы задачу на кратное сравненіе двухъ чиселъ они умѣли сводить къ дѣйствию дѣленія на равныя части. Для этого можно приучить ихъ къ разсужденіямъ слѣдующаго рода: 640 надо раздѣлить на 8 равныхъ между собою частей; представимъ себѣ, что число 640 разбито на группы по 8-ми единицамъ въ каждой, т. е. что оно состоитъ изъ восьмерокъ; взявъ отъ каждой восьмерки по единицѣ, мы получимъ столько единицъ, сколько разъ 8 содержится въ 640; но, взявъ по одной единицѣ изъ каждой восьмерки, мы получимъ столько единицъ въ результатѣ, что это число единицъ составляетъ одну восьмую долю 640-ка. Стало-быть, и т. д. Не подлежитъ сомнѣнію, что разсужденія такого рода очень не легко усваиваются учащимися въ отвѣченномъ видѣ; а потому для выясненія этой стороны ученія обь обонхъ видахъ дѣленія должно прибѣгнуть къ цѣлому ряду упражненій на наглядныхъ пособіяхъ, — упражненій, въ которыхъ долженъ принять участіе весь классъ, а также каждый ученикъ въ отдѣльности. Время, потраченное на эту частность ученія о дѣленіи, будетъ потрачено не даромъ; эта частность принадлежитъ къ числу тѣхъ, на которыхъ первоначальный курсъ ариметики не можетъ останавливаться по причинѣ представляющихся при этомъ трудностей. Но, въ то время какъ въ первоначальномъ курсѣ ариметикѣ оба вида дѣленія разсматриваются отдѣльно одинъ отъ другого, въ I-мъ классѣ ср. уч. зав. обязательно открыть дѣтямъ перспективу объединенія обонхъ видовъ дѣленія въ одно дѣвствіе. Когда вышенамѣченный способъ проработки понятія взаимной связи дѣвствій дѣленія и кратнаго сравненія усвоенъ, можно перейти къ производству дѣвствія. Но если бы усвоеніе взаимной связи обонхъ видовъ дѣленія по причинѣ низкаго уровня развитія даннаго класса оказалось въ данный моментъ не по силамъ большинства, то можно прямо отъ понятія обь интересующихъ насъ видахъ дѣленія перейти къ производству дѣвствія, при чемъ каждый изъ видовъ дѣвствія должно производить согласно спеціальнымъ требованіямъ даннаго вида его. (II, 111—135, 136—150).

Въ то время какъ при прохожденіи ученія о первыхъ трехъ дѣвствіяхъ полезно и даже необходимо ознакомить дѣтей съ различными способами ихъ производства и приучить ихъ къ упрот-

ребленію этихъ способовъ, при прохожденіи ученія о производствѣ дѣленія на равныя части и кратнаго сравненія наврядъ ли полезно прибѣгать къ такимъ способамъ, которые должно считать крайне искусственными и неудобными въ практическомъ отношеніи; а таковы все способы производства дѣленія, за исключеніемъ общепринятаго. Такъ, напр., способъ послѣдовательнаго вычитанія меньшаго изъ данныхъ двухъ чиселъ изъ большаго, при кратномъ ихъ сравненіи, не только не приближаетъ учащагося къ пониманію общепринятаго способа, но даже не состоитъ съ этимъ послѣднимъ ни въ какой методической связи; кромѣ того, онъ просто малополезенъ въ развивательномъ и крайне неудобенъ въ практическомъ отношеніи. Небезиозлезно, можетъ быть, въ методическомъ отношеніи прибѣгать вначалѣ къ вычитанію лишь въ томъ случаѣ, когда мы вычитаемъ сразу увеличеннаго въ 1000, 100 или 10 разъ дѣлителя, смотри по тому — каковъ наивысшій разрядъ искомаго частнаго; но послѣдовательное вычитаніе дѣлителя изъ дѣлимаго совершенно безполезно въ случаяхъ многозначнаго частнаго. Умѣнію опредѣлять наивысшій разрядъ частнаго, въ случаѣ если оно есть число многозначное, дѣти должны и могутъ быть безъ особеннаго труда научены. Тогда дѣленіе по содержанію можетъ быть совершаемо, для лучшаго выясненія обычнаго способа его производства, по слѣдующему образцу: пусть требуется узнать сколько разъ 19 содержится въ 1086097-ми. Разсуждаемъ такъ: 19 въ данномъ числѣ не содержится ни одного милліона разъ, ни ста тысячъ разъ, потому что и т. д., но 19 содержится въ данномъ дѣлимомъ болѣе 10-ти тысячъ разъ; вычтемъ 19×10000 , т. е. 190000, изъ даннаго числа. Вычитаемъ

1086097	изъ полученнаго остатка еще разъ 190000, получаемъ
— 190000	706097; вычти еще разъ то же число, получимъ, и т. д.
— 896097	Такимъ образомъ, вычитая произведеніе изъ 19 на 1000
— 190000	ровно столько разъ, сколько это необходимо, чтобы въ
— 706097	остаткѣ получилось менѣе, чѣмъ это произведеніе, мы
— 190000	получимъ такимъ образомъ, что это произведеніе содер-
— 516097	жится въ дѣлимомъ столько-то разъ. Отсюда выведемъ,

сколько десятковъ тысячъ разъ 19 заключается въ 1086097-ми. Точно такъ же можно узнать — сколько тысячъ разъ 19 содержится въ послѣднемъ остаткѣ, и т. д. Но этотъ способъ дѣленія можетъ быть полезенъ не для усвоенія дѣтми еще одного способа производства, а только для выясненія общепринятаго способа производства дѣйствія и для указанія его преимуществъ, на которыя должно быть обращено особенное вниманіе учащихся.

По способамъ отысканія всехъ цифръ многозначнаго частнаго не исчерпываются трудности ученія о производствѣ дѣленія: эти трудности значительны также при отысканіи однозначнаго или двузначнаго числа, если число цифръ дѣлителя болѣе или менѣе

значительно. Выше, въ § 22 главы IV-ой, мы коснулись этихъ трудностей; здѣсь же намъ остается замѣтить только то, что при обученіи не должно бороться съ обилиемъ трудностей сразу; надо сначала научить дѣтей отысканію многозначнаго частнаго при небольшомъ дѣлителѣ, затѣмъ—отысканію однозначнаго частнаго при болѣе или менѣе крупномъ дѣлителѣ, съ тѣмъ что-бы потомъ перейти къ отысканію многозначнаго частнаго при многозначномъ же дѣлителѣ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ не безполезно научить дѣтей также и тому способу производства дѣленія который основанъ на томъ, что, ранѣе чѣмъ приступить къ этому производству, опредѣляютъ произведение данного дѣлителя на 2, 3, 4, и т. д. до 9 ти включительно, каковою таблицею произведеній можно съ большимъ успѣхомъ пользоваться въ очень многихъ случаяхъ. См. „Уч. Ар.“, отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“, § 7, ст. III, о дѣйствіяхъ. Для вищаго укрѣпленія теоретическихъ ученій должно выдѣлить учащимся на задачахъ (II, 121—130) взаимную зависимость произведенія, множимаго и множителя съ одной, и дѣлимаго, дѣлителя и частнаго—съ другой стороны.

Что касается научнаго опредѣленія дѣленія, то оно умѣстно лишь по предварительномъ усвоеніи учащимися теоретическихъ и техническихъ трудностей интересующаго насъ дѣйствія. Кроме того должно замѣтить, что задачи (нѣкоторыми составителями помѣщаемыя въ отдѣлѣ нумерации) на опредѣленіе числа всѣхъ единицъ данного разряда, заключающагося въ данномъ числѣ, суть задачи на кратное сравненіе и въобщѣ умѣстны только на интересующей насъ ступени обученія. (II, 131—135).

§ 10. Изъ различныхъ измѣненій некоторыхъ чиселъ въ зависимости отъ измѣненій данныхъ, тѣ, которыя являются результатомъ одновременнаго измѣненія данныхъ чиселъ, иногда представляютъ собою довольно большія затрудненія. Когда мы имѣемъ дѣло съ суммою и разностью, дѣло еще кое-какъ идетъ на-ладъ, ибо особенныхъ затрудненій измѣненія суммы и разности не представляютъ ни въ логическомъ отношеніи, ни въ отношеніи выкладокъ. (II, 151—200) Далеко не то же должно замѣтить относительно тѣхъ измѣненій произведенія и частнаго, которыя являются окончательнымъ результатомъ одновременнаго увеличенія или уменьшенія множимаго и множителя въ какое нибудь число разъ, отъ одновременнаго увеличенія множимаго въ нѣкоторое число разъ и уменьшенія множителя—въ то же или иное число разъ и одновременнаго измѣненія дѣлимаго и дѣлителя въ какое нибудь число разъ.

Прежде всего для учащихся не вполне понятна, что отъ увеличенія множимаго въ m разъ, а множителя въ n разъ произведеніе увеличивается не въ $m + n$, а въ $m \times n$ разъ. Научное доказатель-

ство этого свойства произведения, конечно, очень просто и разумительно; оно основано на сочетательномъ законѣ умноженія, по которому

$$(a \times m) \times (b \times n) = (a \times b) \times (m \times n).$$

Но этотъ способъ отличается слишкомъ большою отвлеченностью и говорить очень мало уму и воображенію учащагося. Поэтому необходимо сказанное свойство сдѣлать доступнымъ воображенію съ помощью разсужденій, подобныхъ, напр., слѣдующимъ. Пусть множимое 360, а множитель 17; требуется опредѣлить во сколько разъ произведеніе этихъ чиселъ меньше произведенія чиселъ, изъ которыхъ множимое въ 5 разъ больше данного множимаго, а множитель въ 4 раза больше данного множителя: требуется найти — во сколько разъ произведеніе произведеній 360×5 и 17×4 болѣе произведенія 360×17 . Это послѣднее произведеніе равно суммѣ 17-ти слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно 360-ти. Отъ увеличенія каждаго слагаемаго въ 5 разъ сумма должна увеличиться въ 5 разъ; стало-быть,

$$(360 \times 5) \times 17 : (360 \times 17) = 5.$$

Теперь умножаемъ множителя, т. е. 17, на 4; вслѣдствіе этого увеличится дѣлимое нашей формулы въ 4 раза, а въ такомъ случаѣ и интересующее насъ отношеніе тоже увеличится въ 4 раза, т. е.

$$(360 \times 5) \times (17 \times 4) : 360 \times 17 = 5 \times 4,$$

— что и требовалось доказать. Это доказательство гораздо разумнѣе и нагляднѣе работаетъ надъ логическою основою интересующаго насъ свойства, чѣмъ выше охарактеризованное, какъ бы лишнее, преобразование функций $(a \times m) \times (b \times n)$ въ функцию $(a \times b) \times (m \times n)$.

Въ ученіи объ измѣненіи произведенія и частнаго (II, 201 — 230) есть, какъ извѣстно, такіе случаи, которыхъ изученіе невозможно ранѣе усвоенія дѣтскими курсомъ дробей, вслѣдствіе чего это ученіе страдаетъ неполнотою и пробѣлами. Дѣти, будучи въ состояніи отвѣтить на вопросъ — какъ измѣнится произведеніе отъ одновременнаго увеличенія множимаго въ 5 разъ и уменьшенія множителя въ 15 разъ, не въ состояніи справиться съ вопросомъ объ одновременномъ умноженіи множимаго на 4 и раздѣленіи множителя на 3, и т. и. По нашему крайнему разумѣнію, этихъ пробѣловъ отъ учащагося скрывать не слѣдуетъ; напротивъ: дѣти должны понять, что при умноженіи они умѣютъ разрѣшать вопросъ объ измѣненіи произведенія въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) при одновременномъ увеличеніи множимаго и множителя въ какое либо число разъ, 2) при одновременномъ ихъ уменьшеніи на 3, при одновременномъ увеличеніи множимаго въ m и уменьшеніи множителя — въ n разъ, если $m : n$ или $n : m$ есть число

цѣлое; кромѣ того, они должны понять, что при дѣленіи они умѣютъ разрѣшать вопросы въ слѣдующихъ случаяхъ: 1) при одновременномъ увеличеніи одного изъ данныхъ чиселъ и уменьшеніи другого — въ любое число разъ, и 2) при одновременномъ увеличеніи (или уменьшеніи) одного числа въ m , а другого — въ n разъ, если $m:n$ или $n:m$ есть число цѣлое. Относительно остальныхъ измѣненій дѣли должны знать, что они не умѣютъ опредѣлять измѣненій въ такихъ то и такихъ-то случаяхъ. Знание предѣловъ нашихъ знаний очень важно. Если дѣли этихъ предѣловъ не усвоили себѣ путемъ надлежащихъ упражненій, то все ученіе объ измѣненіи произведенія и частнаго является безконечнымъ и не можетъ преисподовать на цѣльность и закругленность, а на умственные навыки учащагося не можетъ оказать достаточно полезнаго развивательнаго вліянія.

Кромѣ того, при прохожденіи ученія объ измѣненіи результатовъ четырехъ дѣйствій полезно обратить вниманіе на слѣдующіе факты 1) Въ случаѣ примѣненія дѣйствій умноженія и дѣленія къ числамъ, даннымъ для сложена и вычитанія, измѣненія суммы и разности не зависятъ отъ величины данныхъ чиселъ только въ случаяхъ, когда всѣ слагаемыя (или уменьшаемое и вычитаемое) умножены или раздѣлены на одно и то же число; въ остальныхъ же случаяхъ примѣненія умноженія и дѣленія измѣненія результатовъ вообще зависятъ и отъ данныхъ чиселъ. 2) Въ случаѣ примѣненія дѣйствій сложена и вычитанія къ числамъ, даннымъ для умноженія или дѣленія, измѣненія результатовъ вообще зависятъ не только отъ вновь введенныхъ, но также и отъ данныхъ чиселъ. — Особеннаго вниманія заслуживаютъ слѣдующіе случаи, въ которыхъ дѣли, при недостаточной подготовкѣ, склонны видѣть случаи неизмѣнимости искомымъ чиселъ: 1) одновременное умноженіе одного изъ слагаемыхъ на нѣкоторое число и раздѣленіе другого — на то же число; 2) одновременное увеличеніе уменьшаемаго и вычитаемого въ одно и то же число разъ; 3) одновременное прибавленіе къ множителю нѣкотораго числа и вычитанія изъ множителя того же числа, и наконецъ 4) одновременное увеличеніе или уменьшеніе дѣляемаго и дѣлителя на одно и то же число. Въ особенности подпадаютъ дѣли заблужденіямъ въ послѣднемъ случаѣ, на который поэтому должно обратить особенное вниманіе.

§ 11. Въ тѣсной связи съ разсмотрѣннымъ въ предыдущемъ параграфѣ ученіемъ находятся случаи, допускающіе сокращеніе въ вычисленіяхъ при отысканіи суммы, разности и произведенія чиселъ, представляющихъ нѣкоторыя индивидуальности *).

*). Случаи сокращенія вычисленія при дѣленіи находятся по большаи части въ связи съ ученіемъ о пропорціяхъ (ср. „Учебникъ ариметики“ §§ 99 и 100, а равно отъѣтъ „Фундаментальныхъ статей“)

случаи (II, 231—300) представляются при сложении и вычитании, когда одно вь данныхъ чисель бѣзко къ единиць или однозначному числу единицъ какого либо разряда (II, 231—232), а при умноженіи — либо когда множитель бѣзко къ единиць какого либо разряда (II, 233—238), либо когда онъ равенъ одному изъ слѣдующихъ чисель: 5, 11, 15, 25, 75, 125, 175, 225, 275, 375, 525, 675, 875 и 1125. Здѣсь не считаемъ необходимымъ вдаваться въ подробности о томъ, въ чемъ собственно состоятъ сокращения, достигаемыя въ этихъ случаяхъ въ „Мет. Сборникъ“ и „Учебникъ ариѳметики“ на сказанные случаи обращено должное внимание. Но считаемъ нужнымъ замѣнить, что дѣль подобныя упрощенія заключается не только въ приученіи дѣлен къ вычисленію быстрому и не согласному съ общими правилами умноженія, но также въ уясненіи имъ самой сути дѣйствія независимо отъ обычныхъ правилъ его произвоства. Въ отдѣлѣ „Дополнительныя стаета“ нашего „Учебника ариѳметики“ приведены еще нѣкоторые случаи сокращения вычисленія, и дѣль ихъ — оишь-таки не исключительно практическая, но также и теоретическая.

Поконный и датель извѣстнаго ученаго нѣмецкаго журнала, Крелте (Crelle), составилъ превосходныя таблицы особеннаго, нелогарифмическаго, устройства, благодаря которымъ умноженіе и дѣленіе трехзначныхъ чисель совершается очень быстро*), ознакомленіе учениковъ съ уч. зав. съ правилами этихъ таблицъ, конечно, было бы нецѣлесообразно. Но что касается умноженія на двузначныя числа, то не безполезна учащихся упражнять въ умноженія не только по обычнымъ правиламъ. Умноженіе на двузначныя числа меньшія 15-ти можетъ быть произвоимо, напр., по слѣдующему образцу:

$$\begin{array}{r} 7168 \times 13 \\ + 21494 \\ \hline 93174, \end{array}$$

гдѣ произведеиіе множимаго на 10 не переписано; умноженіе на 15 можетъ быть произвоимо по слѣдующему образцу.

$$\begin{array}{r} 7167 \times 15 \\ + 57835 \\ \hline 107505, \end{array}$$

гдѣ произведеиіе изъ множимаго на 5 найдено путемъ раздѣленія увеличеннаго въ 10 разъ множимаго, умноженіе на число, большее 15-ти, можетъ быть произвоимо по слѣдующему образцу:

*) Crelle, Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividiren mit Zahlen unter Fünf- und ganz (15) u. u. e. bei grosseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Berlin. 1820

$$\begin{array}{r}
 7879 \times 17 \\
 39995 \\
 7879 \\
 + 7879 \\
 \hline
 133943
 \end{array}$$

При умножении на всякое двузначное число можно приблѣнуть къ какому либо искусственному приему, цѣль котораго заключается не въ сокращеніи вычисленія, а въ приученіи дѣтей сморѣть на производство дѣйствія умноженія не только съ узкой точки зрѣнія обычнаго правила этого производства. Напр., при умноженіи на 27, на 36, на 45 можно поступить такъ:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 7168 \times 27 \\
 7168 \\
 + 1792 \\
 \hline
 193536
 \end{array} & \begin{array}{r}
 7178 \times 36 \\
 286720 \\
 - 28672 \\
 \hline
 258048
 \end{array} & \begin{array}{r}
 237 \times 45 \\
 11850 \\
 - 1185 \\
 \hline
 10665 *)
 \end{array}
 \end{array}$$

Повторяемъ. сокращения, получаемыя при всѣхъ подобныхъ вычисленіяхъ, весьма проблематичны, за исключеніемъ случаевъ, указанныхъ нами ранѣе; но цѣль подобныхъ упражненій, повторяемъ, вовсе не въ сокращеніи вычисленія, а только въ приученіи дѣтей къ пониманію сущности дѣйствія и къ болѣе широкому взгляду на обыкновенно практикземый письменный способъ производства умноженія: ихъ надо приучить къ живому, свободному отъ рутины, взгляду на производство дѣйствій.

§ 12. Скобки, какъ извѣстно, употребляются не только въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ необходимы, когда безъ нихъ ариѳметическая записъ выражаетъ совсѣль другое количество, но также и тогда, когда безъ нихъ обойтись возможно безъ всякаго вреда для дѣла (отъ употребленія скобокъ въ этихъ случаяхъ учащійся вскорѣ и самъ отучается), а ральнымъ образомъ въ такихъ случаяхъ, когда скобки помогаютъ лучшему отлѣненію особеннаго смысла данной записи, иногда и безъ скобокъ довольно очевиднаго, а иногда и не очевиднаго. Практика показываетъ, что учащемуся гораздо легче научиться употребленію скобокъ въ случаяхъ, когда онѣ необходимы, чѣмъ отучиться отъ употребленія ихъ, когда онѣ не необходимы. Еще болѣе трудностей представляютъ для учащагося тѣ случаи, когда скобки употребляются исключительно для цѣлей болѣе нагляднаго отлѣненія смысла данной записи

*) Первый прирѣръ вычисленъ такъ: взята 2 раза множимое, потомъ множимое умножено на 100 и взята четверть произведенія, второй—такъ: множимое умножено на 40, а изъ полученнаго вычтены тотъ же результатъ безъ послѣдняго нуля, а третій—такъ: множимое умножено на 100, полученное раздѣлено на 2, а изъ вновь полученнаго вычтены тотъ же результатъ безъ послѣдняго нуля.

Упражнения на употребление скобок, кроме специального своего предназначения, оказываются очень полезными для твердого усвоения учащимися арифметической терминологии и развития точной речи. Когда дело касается результатов различных действий. Эти вѣ стороны данной ступени курса, конечно, не должны быть игнориремы, но при этомъ не должно слишкомъ насилловать мышление и речь дѣтей. Такъ, напр., отъ нихъ можно требовать, чтобы они могли сказать, что запись

$$(3 + 5) \times (18 - 13)$$

представляетъ собою произведение суммы 3-хъ и 5-ти на разность между 18-тью и 13-тью; но было бы нецѣлесообразно требовать отъ нихъ, чтобы они запись

$$(3 \times 5 + 8 \times 7) \times 4$$

читали такъ: произведение изъ суммы произведений 3-хъ и 5-ти и 8-ми и 7-ми на 4; ибо такое чтение крайне неестественно и невразумительно; гораздо лучше, если они прочтутъ эту запись такъ: 3 помножить на 4, 8 помножить на 7, полученные произведения сложить, а полученную сумму умножить на 4. Педагогическому такту и вкусу учащаго предоставляется опредѣленіе мѣры требованій, дозволительныхъ для данного случая: отъ особенно запутанныхъ, хотя бы и совершенно вѣрныхъ, способовъ чтения арифметическихъ выраженій должно по возможности воздерживаться.

Нѣкоторые преподаватели требуютъ, чтобы дѣти умѣли отвѣтъ задачи изображать прямо въ явной функции данныхъ задачи съ помощью знаковъ дѣйствій и скобокъ. Подобныя упражненія, конечно, небезполезны, но при этомъ не должно увлекаться этими умѣніями. Когда задача уже рѣшена, можно потребовать отъ учащаго охарактеризованнаго способа обозначенія отвѣта; требовать же отъ нихъ такого обозначенія всегда и, при томъ, думать, что они всегда должны умѣть безъ предварительнаго рѣшенія задачи выражать неизвѣстное задачи въ видѣ явной функции данныхъ чиселъ, отнюдь не слѣдуетъ. Такихъ результатовъ добиться, конечно, возможно при нѣкоторой настойчивости, но потраченные на такое специфическое умѣніе трудъ и время не соответствуютъ цѣлности достигнутаго результата: это—дрессировка въ слишкомъ специальномъ направленіи, слишкомъ далекомъ отъ истинныхъ цѣлей образованія.

Во II часѣ нашего „Мет. Сборника“ есть цѣлый рядъ упражненій, цѣль которыхъ заключается въ приученіи дѣтей къ составленію аналитическихъ равенствъ, въ которыхъ скобки играютъ роль служебную, а именно служатъ для точнаго отъиценія изъ вѣстныхъ ученій арифметики (II, 331—400) Первая изъ задачъ этого рода гласитъ: „Обозначить помощью знаковъ, что если

дана сумма чиселъ 279 и 753, то, отъ уменьшенія перваго изъ слагаемыхъ на 84, сумма уменьшается на столько же единицъ“. Задачи этого рода могутъ оказаться для учащихся на первыхъ порахъ затруднительными по винѣ того, что они сначала неясно понимаютъ вопросъ и не знаютъ—какъ справиться съ условнымъ выраженіемъ: „если дана сумма“. Отвѣтъ на эту задачу долженъ быть слѣдующій:

$$(279 + 753) - 84 = (279 - 84) + 753.$$

Хотя это равенство выражаетъ также и тотъ фактъ, что для уменьшенія суммы чиселъ 279 и 753 на 84 единицы можно уменьшить на 84 единицы первое изъ слагаемыхъ, но это—не бѣда; надо только стараться о томъ, чтобы учащійся понималъ во всемъ объемѣ подобныя равенства и умѣлъ ихъ истолковывать. Для лучшаго выясненія требоваши, которыя могутъ быть предъявлены къ учащимся, замѣтимъ, что задача (подъ № 393) гласитъ такъ: „Обозначить помощью скобокъ, что если дано произведеніе чиселъ 504 и 84, то, отъ увеличенія множимаго въ 12 разъ и отъ уменьшенія множителя въ 3 раза, произведеніе увеличится во столько разъ, сколько единицъ въ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленія 12 на 3“,—что эта задача разрѣшается такъ:

$$(504 \times 12) \times (84 : 3) = (504 \times 84) \times (12 : 3).$$

§ 13. Рѣшеніе такъ называемыхъ „задачъ на всѣ четыре дѣйствія“ часто бываегь очень затруднительно съ учащимися, если учащій предлагаетъ задачи какъ ни пошло, не дѣлая различія между задачами чисто-аритметическими и задачами алгебраическаго характера. Во избѣжаніе обычной нестрогости этого отдѣла задачниковъ, мы во II ч. „Методическаго Сборника“ (№№ 401—560) задачи алгебраическаго характера выдѣлили въ отдѣльную рубрику. То же самое мы сдѣлали съ задачами алгебраическаго характера съ дробными данными или дробными результатами.

На способъ рѣшенія сложныхъ чисто-аритметическихъ задачъ мы здѣсь останавливаться не будемъ, такъ какъ этого способъ не представляетъ ни для учащихся, ни для учащаго особенныхъ затрудненій. Должно только замѣтить, что по составленіи плана рѣшенія и разложеніи данной задачи на рядъ простыхъ задачъ дѣти могутъ быть приучены къ составленію такъ наз „строчекъ“ рѣшенія: это приучаетъ учащихся къ некоторому порядку и единообразію приемовъ. Но было бы ошибочно приписывать какое либо особенное значеніе „строчкамъ“: если учащійся легко обходится безъ нихъ, то было бы излишнее тратаю времени постоянное веденіе строчекъ, которое можетъ оказать на развитіе мысли болѣе или менѣе замѣляющее вліяніе и приучить учащихся къ безполезному многословію, къ которому они и безъ того могутъ

оказались приверженными, если учащій не постарается задержать развитіе этого недостатка (II, 401—445).

Когда рѣшенію такъ называемыхъ ариѳметическихъ задачъ болыпимствомъ приписывается особенно развивающее на умъ учащагося влияние, то при этомъ имѣются въ виду задачи преимущественно изъ числа алгебраическихъ, потому что даже весьма сложныя чисто-арифметическія задачи отличаются отъ менѣ сложныхъ только по количеству вычисленій, которыя требуется выполнить при ихъ рѣшеніи. Далекое не то же можно сказать о задачахъ алгебраическаго характера: иногда, при очень простомъ словесномъ и числовомъ содержаніи, для ихъ рѣшенія требуется прибѣгнуть къ такимъ разсужденіямъ, которыя дѣйствительно возможны только при довольно высокомъ умственномъ развитіи учащагося въ направленіи точнаго математическаго мышленія. Но не должно забывать, что это направленіе умственнаго развитія есть направленіе безусловно специальное, зависящее въ весьма значительной степени отъ индивидуальности учащагося. Читателю, вѣроятно, извѣстны два диаметрально противоположныхъ взгляда на арифметику: одни думаютъ, что для усвоенія этого предмета не требуется никакихъ специальныхъ способностей, другіе — напротивъ, что онъ требуетъ специально математической головы. Первые склонны видѣть причину недостаточныхъ успѣховъ въ арифметикѣ, замѣчаемыхъ въ данномъ субъектѣ, исключительно въ учителѣ и постановкѣ обученія этому предмету, другіе — только въ учащемся и, если можно такъ выразиться, въ устройствѣ его головы. Само собою разумѣется, что каждый изъ этихъ взглядовъ не вполне правиленъ. Для возможности усвоенія курса арифметики какъ таковой, т. е. для усвоенія чисто-арифметическихъ умѣній и познаній, составляющихъ содержание этого предмета, отъ учащагося не требуется никакихъ особенныхъ специальныхъ способностей: онъ не будетъ особенно ловкимъ счетчикомъ и большимъ знатокомъ арифметическихъ теорій; но онъ можетъ усвоить себѣ не только правила производства арифметическихъ дѣйствій, но также и теоретическіе элементы того или иного курса арифметики. Съ другой стороны для тонкаго пониманія ея теорій, конечно, требуется математическій складъ мышленія и интересъ учащагося къ вопросамъ отвѣченнаго мышленія въ направленіи математическомъ. Но, къ сожалѣнію, умѣне рѣшать всяческія задачи на четыре дѣйствія почему то принято относить къ числу умѣній, которыя тѣсно связаны съ курсомъ арифметики; поэтому, когда говорятъ, что для усвоенія среднееобразовательнаго курса арифметики необходимы какія-то особенныя математическія способности, то имѣютъ въ виду главнымъ образомъ умѣне разрѣшать всякую такъ наз. арифметическую задачу изъ даннаго сборника ихъ. При этомъ дѣлается грубая логическая ошибка маль-

чикъ или дѣвочка могутъ отлично знать *арифметику* и не быть въ состояніи справиться съ данною задачею (въ особенности если она принадлежитъ къ числу алгебраическихкихъ); обратно: учащійся можетъ быть очень ловокъ въ рѣшеніи задачъ и довольно плохо знать курсъ арифметики.

Поэтому можно установить слѣдующій принципъ: для возможности усвоенія курса арифметики *какъ таковой* достаточны самыя обыкновенныя способности къ отвлеченному математическому мышленію; для быстраго же усвоенія всѣхъ методовъ неалгебраическаго рѣшенія всяческихъ задачъ алгебраическаго характера необходимъ нѣкоторый логико-математическій складъ ума. Если этимъ складомъ учащійся не отличается, то усвоеніе методовъ рѣшенія алгебраическихъ задачъ для него представитъ большіи или меньшія затрудненія. Но учебное введеніе должно считаться преимущественно со среднимъ ученикомъ, а потому при усвоеніи дѣтьми методовъ рѣшенія алгебраическихъ задачъ должно держаться строгой системы и заботиться о методической проработкѣ этихъ методовъ, при чемъ рѣшеніе задачъ, слѣдующихъ одна за другою какъ ни понало, дозволятельно только при повтореніи. Мы лично стояли бы за прохожденіе арифметическихъ задачъ алгебраическаго характера при усвоеніи дѣтьми ученія объ уравненіяхъ первой степени и ихъ составленіи; но, въ виду установившагося на практикѣ обычая прохожденія этихъ задачъ въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и даже въ учебныхъ введеніяхъ съ болѣе высокимъ курсомъ, мы не могли рѣшиться на игнорированіе этого рода задачъ въ трудахъ нашихъ. Здѣсь позволимъ себѣ коснуться методовъ рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ алгебраическаго характера неалгебраическими способами, обращая иногда вниманіе также и на способъ алгебраическій.

Задачи алгебраическія, обыкновенно предлагаемыя въ употребительныхъ сборникахъ арифметическихъ задачъ, могутъ быть подведены подъ категоріи: а) задачи-загадки: задумано число, надъ нимъ совершенъ рядъ арифметическихъ дѣйствій, послѣ чего получился такой-то окончательный результатъ (II, 446—474); б) по данной суммѣ и разности двухъ неизвѣстныхъ чиселъ найти эти послѣднія (II, 475—484); в) даны сумма большого количества чиселъ и достаточныя для разрѣшенія задачи разностныя отношенія нѣкоторыхъ изъ нихъ (II, 485—489); г) по данной суммѣ и кратному отношенію (частвому) двухъ неизвѣстныхъ чиселъ найти каждое изъ нихъ (II, 490—494); д) по даннымъ разности и кратному отношенію двухъ чиселъ найти каждое изъ нихъ (II, 495—514); е) задачи, которыя при переводѣ на алгебраическій языкъ, даютъ непосредственно систему уравненій

$$\begin{aligned}x \times a + y \times b &= c \\x \times m + y \times n &= p,\end{aligned}$$

причемъ a , b , m и n суть числа положительныя (II, 515—524); ж) задачи, которыя, при переводѣ на алгебраическій языкъ, даютъ непосредственно систему уравненій:

$$\begin{aligned} c \times a + y \times b &= c \\ mx &= ny \end{aligned}$$

гдѣ m и n суть числа цѣлыя (II, 524—529); з) задачи, дающія систему уравненій:

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= b \\ y + z &= c, \end{aligned}$$

и вообще задачи, сводящіяся къ отысканію двухъ неизвѣстныхъ по суммѣ ихъ и разности (II, 530—539). Кроме того, въ задачахъ встрѣчаются такъ наз. задачи „о курьерахъ“, далѣе задачи, въ которыхъ даны сумма или разность чиселъ и достаточныя для разрѣшенія ихъ отношенія однихъ чиселъ къ другимъ, а также задачи на измѣненіе кратнаго отношенія двухъ чиселъ при постоянной разности между ними. (II, 540—560).

Въ приложеніи къ этой книгѣ изложены способы рѣшенія задачъ каждаго изъ выше охарактеризованныхъ типовъ. Здѣсь же позволимъ себѣ коснуться также взаимной связи между алгебраическими и не-алгебраическими способами рѣшенія.

Задачи, въ которыхъ требуется по данной суммѣ и разности двухъ чиселъ найти каждое изъ нихъ, допускаютъ, какъ извѣстно, двойное алгебраическое рѣшеніе: съ помощью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ и съ помощью системы уравненій о двухъ неизвѣстныхъ. Неалгебраическое же рѣшеніе такого рода задачи *implicite* содержитъ въ основѣ своей законы, по которымъ:

$$(a + b) + (a - b) = 2a \quad \text{и} \quad (a + b) - (a - b) = 2b.$$

Само собою разумѣется, что дѣтямъ, незнакомымъ съ алгебраическимъ языкомъ, эти законы не могутъ быть достаточно ясны; а потому приходится прибѣгать къ разсужденіямъ болѣе искусственнымъ. Пусть S обозначаетъ сумму, а d — разность двухъ чиселъ. Хотя бы учащемуся и было даже вполне понятно, что сумма меньшаго числа съ разностью между большимъ и меньшимъ равна большому, по ему чаще всего непонятно, почему $S + d$ равно вдвое больше большаго изъ нихъ. Говоря иначе: пусть большее число обозначено буквою M , а меньшее — буквою m ; ему понятно, что $m + d = M$, но далеко не понятно, что $S + d = 2M$, потому что это равенство основано на томъ, что

$$S + d = (M + m) + d = M + (m + d),$$

а это послѣднее равенство предполагаетъ довольно высокое умственное развитіе въ направленіи отвлеченнаго мышленія, — тѣмъ болѣе, что употребленіе алгебраическаго языка наврядъ-ли умственно до ознакомленія дѣтей съ сущностью этого закона. Разсужде-

нія, къ которымъ приближаютъ обыкновенно въ случаѣ неалгебраическаго рѣшенія задачи интересующаго насъ типа, такимъ образомъ, по необходимости, не довольно леним. Действительно, пусть предложена задача (II, 475): „сумма двухъ чиселъ 364, а разность 48; какъ велико каждое изъ нихъ?“ Обыкновенно разсуждаютъ такъ: въ 364-хъ содержатся оба числа, и большее и меньшее; если къ меньшему прибавить 48, то получится большее; если къ большому и меньшему прибавить 48, то получится два большихъ; если къ суммѣ обоихъ прибавить 48, то тоже получится два большихъ, и т. д. Но при этомъ для дѣтей, какъ это выяснено выше, остаются не достаточно ясными два пункта: 1) получится ли два большихъ и въ томъ случаѣ, когда мы разность прибавимъ къ большому, а къ полученной суммѣ—меньшее? и 2) все ли это равно: прибавить къ суммѣ обоихъ чиселъ 48 или же только къ одному изъ нихъ, а именно къ меньшему,—съ тѣмъ чтобы потомъ прибавить полученное къ большому? Эти пункты неясны для дѣтей, повторяемъ, только вслѣдствіе недостаточно твердаго навыка къ отвлеченному мышленію, болѣе или менѣе неизбежнаго. Поэтому мы позволяемъ себѣ задачи этого типа считать совсѣмъ неумѣстными въ I кл. ср. уч. зав. Но ужъ если упражнять дѣтей въ рѣшеніи задачъ этого типа, то полезнѣе приближать къ другому способу ихъ рѣшенія, причемъ дѣтей надо предварительно поупражнять въ рѣшеніи задачъ слѣдующихъ четырехъ типовъ: 1) удвоить поровну денегъ; насколько у второго станетъ больше, чѣмъ у перваго, если первый отдалъ второму 1 р., 2 р., 15 р., 17 р.? 2) даны два неравныхъ между собою числа; отъ большаго отнята 1 единица (2 ед., 15 ед.), а къ меньшему прибавлено столько же; на сколько уменьшилась разность между числами? 3) даны два неравныхъ между собою числа; отъ меньшаго отнята 1 единица (2 ед., 15 ед.), а къ большому прибавлено столько же; на сколько увеличилась разность? 4) разность между двумя числами 2, 8, 46; сколько надо отнять отъ большаго и въ то же время прибавить къ меньшему, чтобы оба числа стали равны между собою?—Цѣль всѣхъ этихъ упражненій—убѣдить дѣтей въ томъ, что если разность между двумя числами равна какому либо числу, то для того, чтобы эти числа стали равны между собою, достаточно уменьшить большее изъ нихъ и увеличить меньшее на половину данной разности^{*)}. Тогда всякая задача интересующаго насъ типа можетъ быть разрѣшена по слѣдующему образцу: сумма двухъ чиселъ S , а разность d ; если большее

^{*)} Методическія упражненія въ указанномъ направленіи не помѣщены въ нашемъ „Метод. Сборникѣ“ изъ боязни чрезмѣрнаго увеличенія его объема и въ виду того, что учащій легко можетъ придумать и самъ такія упражненія, если онъ раздѣлитъ нашъ взглядъ на нихъ.

уменьшить на $\frac{d}{2}$, а меньшее — увеличить на $\frac{d}{2}$, то оба числа станут равны одно другому и каждое из них будет равно $\frac{S}{2}$; прежняя же величина большего числа и меньшего в такомъ случаѣ соответственно равна

$$\frac{S}{2} + \frac{d}{2} \text{ и } \frac{S}{2} - \frac{d}{2}.$$

Къ сожалѣнію, предложенный способъ тоже не вполне свободенъ отъ неудобствъ, изъ которыхъ важнѣйшее проявляется въ томъ случаѣ, когда сумма и разность искомымъ чиселъ суть числа нечетныя; но съ этимъ неудобствомъ, кажется, легче примириться и сладить, чѣмъ съ трудностями обычнаго способа рѣшенія задачъ интересующаго насъ типа. Въ основѣ предложеннаго выше способа лежитъ законъ, по которому сумма двухъ чиселъ, при одновременномъ увеличеніи одного изъ нихъ и уменьшеніи другого на одно и то же число, не измѣняется, — законъ, конечно, вполне доступный дѣтскому вниманію.

На такъ наз. задачахъ загадкахъ мы здѣсь останавливаться не будемъ. Достаточно замѣтить, что при рѣшеніи этихъ задачъ дозвоительно ниже рекомендуемая запись условій; хотя эта запись не вполне научна, но всетаки она не предосудительна какъ запись сокращенная. Пусть предложена задача (II, 461): „Къ задуманному числу прибавлено 25; полученное умножено на 4; изъ произведенія вычтено 100; разность умножена на 5; произведеніе раздѣлено пополамъ; въ окончательномъ результатѣ получилось 10; какъ велико задуманное число?“ Запомнить условія этой задачи конечно довольно затруднительно; ихъ надо записать и наиболѣе удобна сокращенная запись этихъ условій въ слѣдующей формѣ:

$$+ 25; \times 4; - 100; \nearrow 5; : 2; = 10.$$

За-то тѣмъ большаго вниманія, съ методической точки зрѣнія, заслуживаютъ задачи, представительницею которыхъ является извѣстная задача о пастухахъ (II, 509): „Дай мнѣ одну изъ своихъ овецъ, сказалъ одинъ пастухъ другому, — и у меня будетъ вдвое болѣе овецъ, чѣмъ у тебя. — Итъ, лучше ты мнѣ дай одну изъ своихъ, отвѣчалъ тотъ, — тогда у насъ будетъ поровну; сколько овецъ у каждого изъ нихъ?“ При рѣшеніи всѣхъ задачъ этого типа въ высшей степени важную роль играютъ тѣ умѣнія, которыя мы выше рекомендовали до прохожденія задачъ на сумму и разность. Самый трудный моментъ этой задачи состоитъ въ опредѣленіи разности искомымъ двухъ чиселъ и преодолѣвать эту трудность дѣти научаются быстро только въ томъ случаѣ, если они ранѣе усвоили условія, при которыхъ два неравныхъ между собою числа можно сдѣлать равными одно другому, не измѣняя

ихъ суммы. Въ интересующей насъ задачѣ эта разность можетъ быть найдена съ помощью втораго условія, по которому первый пастухъ долженъ отдать второму одну изъ своихъ овецъ для того, чтобы у обоихъ стало одинаковое ихъ количество. Изъ этого условія прямо вытекаеть, что у перваго пастуха на самомъ дѣлѣ *два* овцами болѣе, чѣмъ у втораго.

Въ приложеніи къ настоящему сочиненію, посвященномъ рѣшенію задачъ алгебраическаго характера, указаны случаи, когда рѣшеніе задачъ этого послѣдняго рода неалгебраическимъ способомъ скорѣе ведетъ къ цѣли, чѣмъ рѣшеніе ихъ съ помощью уравненій. Здѣсь позволимъ себѣ однако замѣтить, что обычно, по которому рѣшеніе алгебраическихъ задачъ неалгебраическими способами практикуется въ низшихъ классахъ ср. уч. зав. и даже въ начальныхъ народныхъ школахъ, не заслуживаетъ особеннаго сочувствія не только по причинѣ трудности задачъ этого рода, но также и по слѣдующимъ причинамъ: 1) Неалгебраическіе способы рѣшенія задачъ не всегда приложимы, и поэтому нѣтъ возможности дать дѣтямъ понятіе объ общемъ приѣмѣ рѣшенія задачъ алгебраическаго характера; 2) вполнѣдствіи этотъ способъ предается учащимися начальной школы совершенному забвенію, по причинѣ рѣдкаго примѣненія рѣшенія алгебраическихъ задачъ въ жизни, а учащимися ср. уч. зав. неалгебраическіе способы забываются, какъ только они овладѣли уравненіемъ и анализомъ, приводящимъ къ уравненію; 3) развивательная сторона неалгебраическихъ способовъ ничтожна въ сравненіи съ тѣмъ влияніемъ на умственное развитіе, которое можетъ быть достигнуто усвоеніемъ курса ариметики какъ таковой помимо задачъ алгебраическаго характера, которыя, какъ извѣстно, съ этимъ курсомъ не находятся ни въ какой связи.

Во избѣжаніе недоразумѣній мы однако считаемъ необходимымъ повторить, что изъ среднеобразовательнаго курса математики не совершенно должно быть исключено уравненіе дѣтей въ рѣшеніи алгебраическихъ задачъ не-алгебраическими способами. По нашему крайнему разумѣнію, къ нему полезно обращаться не въ низшихъ, а напротивъ въ одномъ изъ высшихъ классовъ, а именно въ то время, когда въ курсѣ алгебры проходитъ рѣшеніе задачъ съ помощью уравненій. Тогда учащіеся въ состояніи исполнѣ сознательно усвоить себѣ сущность неалгебраическихъ способовъ, понять ихъ недостатки и преимущества, оцѣнить ихъ тонкость и остроуміе, а равно убѣдиться въ изобрѣтательности неалгебраическихъ способовъ, съ одной стороны, и въ удобствѣ алгебраическаго способа, его общности и удопримѣнимости въ гораздо большемъ числѣ случаевъ, съ другой. Рѣшеніе алгебраическихъ задачъ неалгебраическими способами въ рендантѣ къ алгебраическому ихъ рѣшенію гораздо умѣстнѣе, чѣмъ самостоя-

тельное неалгебраическое решение сказанных задач в низших классах, которое, как показывает практика и как в том же легко можно было бы убедиться а priori, большинству учащихся чаще всего совсем не под силу и которое поэтому на их умственное развитие не оказывает никакого особенно заметного полезного влияния *).

§ 14. Переходя къ учению объ именованных числахъ, учащiеся не должны думать, что это учение представляетъ собою что нибудь существенно новое: кромѣ того, они должны уяснить себѣ глубокую разницу между тѣми преобразованиями, къ которымъ прибѣгаютъ иногда, когда рѣчь идетъ объ именованныхъ числахъ, и дѣйствіями надъ ними [†]). Преобразования имѣютъ цѣлью полученіе новыхъ чиселъ, но не новыхъ величинъ, а дѣйствіа — полученіе новыхъ величинъ — суммы, разности и т. д. Кромѣ того учащимся должны быть усвоены прежде прохожденія учения о преобразованияхъ и дѣйствіахъ надъ именованными числами два взгляда, лежащiе въ основѣ ученія объ именованныхъ числахъ и объ арифметическихъ числахъ: 1) тотъ взглядъ на такъ называемое именованное число, по которому именованное число есть, строго говоря, не число, а величина, и 2) тотъ, единственно правильный, взглядъ на умноженіе, по которому множитель можетъ быть числомъ только отвлеченнымъ. **) Когда правильный взглядъ на сущ-

*) Несмотря на высказанное выше несочувствіе наше къ рѣшенію алгебраическихъ задачъ въ низшихъ классахъ, мы во II ч. „Мет. Сбор.“ нашего не сочли себя вправе ипорировать задачи этого рода. Единственное отсутствіе отъ обычныхъ, которое мы позволили себѣ по отношенію къ нимъ, заключается въ томъ, что онѣ выгнаны въ отдельную рубрику „задачи алгебраическаго характера“ (II, 446—500, 1521—1650, а равно „смѣшанныя задачи“ подъ №№ 101—110), и что мы, кромѣ того, по отношенію къ этимъ задачамъ строго держались принципа методическаго и болѣе или менѣе единообразнаго расположенія ихъ.

**) Въ механикѣ, математической физикѣ и даже въ геометріи встрѣчаются величины, для численнаго опредѣленія которыхъ употребляется умноженіе, и притомъ какъ бы умноженіе именованнаго числа на именованное же. Въ геометріи площади разматриваются какъ произведенія въ которыхъ длина, а объемы въ которыхъ гдѣ — какъ произведенія трехъ (или) или произведеніе площади на длину. Въ механикѣ встрѣчаются понятія работы, силы, живой силы, а въ физикѣ, кромѣ того, понятія количества электричества, магнитной силы и т. ц., величины которыхъ разматриваются какъ въ которыхъ произведенія. Такъ, если длина обозначена буквою l , масса — буквою m , а промежутокъ времени t , то площадь квадрата, котораго сторона есть l , равна l^2 , объемъ куба, ребро котораго есть l , равенъ l^3 , скорость равномернаго движенія при извѣстныхъ условіяхъ выражается частнымъ $l : t$, работа — выраженіемъ $m \cdot l^2 : t^2$, плотность — выраженіемъ $m : l^3$, количество магнитизма — выраженіемъ $\frac{l}{t} \cdot m$, и т. д. — Но всѣ эти выраженія суть выраженія символическія, а отнюдь не дѣйствительныя арифметическія произведенія или частныя: умножить длину на ту же или другую длину, или массу на

ность дѣйствій умноженія усвоенъ, дѣлѣ очень легко усваиваютъ себѣ также соотвѣтственный взглядъ на дѣлители при дѣленіи именованнаго числа на отвѣченное и на частное (отношеніе) при кратномъ сравненіи дѣлѣмыхъ именованныхъ чиселъ.

При прохожденіи ученія о такъ называемыхъ раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ учащіеся должны понять, что раздробленію могутъ подлежать какъ простыя, такъ и составныя именованныя числа, и что въ результатѣ превращенія можетъ получиться тоже либо простое, либо составное именованное число. Если же не обращать ихъ вниманія на это, то они легко поддаются той ошибкѣ сужденія, которая встрѣчается даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ, и которая состоитъ въ томъ, что когда говорятъ о раздробленіи, то имѣютъ въ виду преимущественно раздробленіе составныхъ именованныхъ чиселъ, а когда говорятъ о превращеніи, то результатъ этого преобразованія представляютъ себѣ непременно въ видѣ составнаго именованнаго числа.

Вполнѣ умѣстна, по нашему мнѣнію, такая постановка дѣла, при которой ученіе объ именованныхъ числахъ является лишь однимъ изъ многочисленныхъ приложений усвоеннаго уже учащимися ученія о дѣйствіяхъ надъ числами отвѣченными. (II, 461—750 и „Смѣшанныя задачи“ №№ 111—120). Этотъ взглядъ на ученіе объ именованныхъ числахъ, особенно распространенный во Франціи (благодаря, главнымъ образомъ, метрической системѣ), доволителенъ и правиленъ также въ школахъ другихъ странъ, такъ какъ это—взглядъ вполнѣ отвѣчающій самой сущности дѣла. Наилучшею дѣльма быть признана такая постановка дѣла, при которой ученику невозможно было бы оправдывать свое неумѣнье рѣшить данную задачу на преобразованіе именованнаго числа или дѣйствіе надъ нимъ тѣмъ, что нѣтъ не пройдены еще именованныя числа. Вполнѣ умѣстнымъ считаемъ мы на интересующей насъ ступени обученія также и ознакомленіе не только съ основными единицами мѣры метрической системы, но даже съ нѣкоторыми выгодами этой послѣдней и дѣйствіями надъ именованными числами, выраженными въ мѣрахъ этой системы. (II, 641—650). На этой ступени было бы не неумѣстно рѣшеніе не

квадратъ длины, раздѣлить длину на время и т. п. на самомъ дѣлѣ невозможно и вѣроятно. Возможно умножить отвѣченное число, выражающее, напр., длину образующей прямого конуса, на число, выражающее, въ тѣхъ же непрерывно единицахъ, длину окружности его основанія, и при этомъ получится число, выражающее, въ совершенно опредѣленныхъ единицахъ поверхности, усвоенную боковую поверхность конуса; но при этомъ вовсе не была умножена самая длина окружности на самую длину образующей, ибо это такъ же невозможно, какъ невозможно умноженіе единицъ на чернильницѣ. Аналогичное справедливо для всѣхъ возможныхъ произведеній и частныхъ въ наукѣ, выражающихъ какія либо специфическія величины: работу, количество тепла, живую силу, количество движенія, силу тока, и т. д.

особенно сложных чисто арифметических задачъ, въ которыхъ все данныя выражены въ мѣрахъ метрической системы, къ сожалѣнiю, упражненiямъ этого рода невозможно посвятить столько времени, сколько надо для того, чтобы дѣти болѣе или менѣе освоились съ единицами метрической системы, привыкли къ нимъ, если можно такъ выразиться. Въ настоящее время метрическая система получаетъ все большее и большее право гражданства въ разнообразнѣйшихъ отрасляхъ науки, и оставляя дѣтей со смутными представленiями о единицахъ этой системы было бы крайне нежелательно. Кромѣ того, крайне полезно выяснитъ дѣтямъ на примѣрахъ ту выгоду метрической системы, которая состоитъ въ томъ, что преобразование чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы (раздробленiе и превращенiе), а равно и дѣйствiя надъ такими числами значительно проще случая именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ иныхъ мѣрахъ (II, 641—650, 666—670 и т. п.), а именно: преобразованiя составныхъ именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ единицахъ метрической системы, сводятся къ свойствамъ десятичной системы счисления, а дѣйствiя — къ дѣйствiямъ надъ отвлеченными числами, получаемыми очень легко.

Въ заключенiе этого параграфа необходимо напомнить, что хотя развитiе вѣрнаго глазомера и не можетъ быть одной изъ цѣлей обученiя арифметикѣ, но тѣмъ не менѣе дѣти должны быть ознакомлены со всеми единицами мѣры наглядно, такъ какъ въ случаѣ полного незнакомства съ величиною этихъ единицъ, задачи на именованныя числа становятся для дѣтей мало интересными и такъ какъ они въ этомъ случаѣ приучаются относиться къ задачамъ на именованныя числа крайне формально, безучастно и, если можно такъ выразиться, сухо и бессознательно.

§ 15. Изъ числа задачъ на составныя именованныя числа особенное мѣсто занимаютъ задачи на вычисленiе времени и геометрическiя—на вычисленiе поверхностей прямоугольниковъ и объемовъ прямоугольных параллелепипедовъ. Задачи на вычисленiе времени представляютъ нѣкоторыя трудности благодаря общепринятому, календарному, если можно такъ выразиться, способу обозначенiя моментовъ времени. Такъ, простое сложенiе двухъ составныхъ именованныхъ чиселъ, выражающихъ промежутки времени, или вычитанiе какого либо промежутка времени изъ другого, вообще не затруднительнѣе такихъ же дѣйствiй надъ длинами или вѣсами, за-то рѣшенiе задачи, въ которой дано число мѣсяцевъ и годъ чьего-либо рожденiя и число лѣтъ, мѣсяцевъ и дней, выражающее — сколько времени это лицо прожило (задача на сложенiе) довольно затруднительна для начинающаго. Вся трудность задачъ на вычисленiе времени, впрочемъ, заключается только, повторяемъ, въ переводѣ календарнаго числа въ составное

именованное и, обратно, составного именованнаго, выражающаго данный промежутокъ времени, въ соответствующее ему календарное. (II, 751—800). При этомъ должно быть дано совершенно точное понятіе объ эрѣ счисленія и объ условномъ обозначеніи разныхъ моментовъ дня и ночи. Разъ это понятіе дано, остальные трудности преодолеваются довольно скоро. — Изъ числа довольно часто встрѣчающихся задачъ на вычисленіе времени должны быть упомянуты задачи на переводъ чиселъ поваго стили въ числа стараго и обратно. (II, 782—785). При этомъ причина разницы въ стилихъ учащимся I-го кл. наврядъ-ли можетъ быть понята какъ слѣдуетъ; поэтому особенно стремиться къ полному выясненію причины этой разницы не слѣдуетъ. Лучше всего такая постановка этой ступени курса, при которой дѣти *на вѣру* принимаютъ существованіе простыхъ и високосныхъ годовъ и сказанной разницы между новымъ и старымъ стилими. „Уч. ар.“, § 6 ст. Это несомнѣнно лучше, чѣмъ искаженное понятіе объ истинной причинѣ существованія високосныхъ годовъ и разницы между Григоріанскимъ и Юліанскимъ стилими; къ сожалѣнію, большее или меньшее искаженіе этого понятія почти неизбежно при бѣгломъ выясненіи его учащимся низшихъ классовъ *).

Что касается задачъ геометрическихъ на опредѣленіе площади прямоугольниковъ и объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, то задачи этого рода могли бы быть, безъ всякаго вреда для дѣла, исключены изъ курса низшихъ классовъ ср. уч. зав., такъ какъ въ послѣдствіи рѣшеніе этихъ задачъ можетъ быть приурочено и дѣйствительно приурочивается съ гораздо большею пользою къ соответствующимъ статьямъ курса геометріи. Тѣмъ не менѣе задачи этого рода вошли во II ч. нашего „Методическаго Сборника арифм. задачъ“; онѣ, впрочемъ, не отнесены въ

*) Хотя снабженіе дѣтей специфическими умѣніями, неизбѣжными прямого отношенія къ ариметикѣ, не можетъ быть обязательно для учащихся арифметикѣ, но тѣмъ не менѣе дѣтей мимоходомъ очень легко и не бесполезно научить весьма простому и распространенному способу опредѣленія — какіе изъ мѣсяцевъ года имѣютъ по 30-ти и какіе — по 31 дню. Этотъ, весьма распространенный, способъ состоитъ въ слѣдующемъ: начиная мизинцемъ лѣвой руки каждый палецъ ея, за исключеніемъ большого, и каждый промежутокъ между этими четверьями пальцами соответствуютъ какому либо мѣсяцу: мизинецъ — январю, промежутокъ между мизинцемъ и безымяннымъ пальцемъ — февралю, безымянный — марту, второй промежутокъ — апрѣлю, третий (средній) палецъ — маю, третий промежутокъ — июню, указательный — июлю; потомъ счетъ начинается снова съ мизинца: мизинецъ — августу, первый промежутокъ — сентябрю, и т. д. до средняго пальца включительно, соответствующаго декабрю. При эгомъ мѣсяцъ, соответствующій пальцу, содержитъ 31, а соответствующій промежутку — менѣе 31-го дня, т. е. 30 дней (февраль — 28 или 29). — Не бесполезно иногда также помнить, что во второмъ полугодіи всегда 184 дня, а въ первомъ 181 или 182.

отдѣльную рубрику. Не считая умѣстнымъ въ курсѣ ариѳметики низшихъ классовъ ср. уч. зав. изложеніе отрывочныхъ геометрическихъ понятій и теоремъ, мы даже въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики“ не посвятили измѣренію поверхностей и объемовъ ни одного параграфа. Такое отступленіе мы позволили себѣ въ видѣ опыта, тѣмъ болѣе, что „Уч. планы“ предметовъ, преподаваемыхъ въ классическихъ гимназіяхъ и въ реальныхъ училищахъ, не касаются прохожденія интересующихъ насъ ученій геометріи въ низшихъ классахъ, и повидимому, при ихъ составленіи, эта статья и соответствующія задачи не считались обязательными. Само собою разумѣется, что въ курсѣ ариѳметики тѣхъ учебныхъ заведеній (низшихъ), въ которыхъ не преподается геометрія, интересующія насъ ученія этой послѣдней и задачи на вычисленіе поверхностей и объемовъ не могутъ быть безъ нѣкотораго вреда для дѣла совершенно исключены. Въ такихъ школахъ (съ трехгодичнымъ или даже съ двухгодичнымъ курсомъ) упражненія въ рѣшеніи задачъ этого отдѣла вычисляющей геометріи можно приурочить къ усвоенію дѣтьми основныхъ геометрическихъ представленій и понятій*), чего нельзя да и не слѣдуетъ дѣлать въ I-мъ классѣ ср. уч. заведеній, такъ какъ въ I-мъ классѣ ср. уч. зав., по изложеннымъ выше соображеніямъ, сказанные элементы курса геометріи неумѣстны какъ по недостатку времени, такъ и потому, что въ послѣдствіи учениковъ ср. уч. зав. ждетъ болѣе или менѣе основательное изученіе Евклидовой геометріи, систематическому курсу которой пройденное въ I-мъ классѣ не только не можетъ быть особенно полезное, но можетъ оказаться даже прямо вреднымъ **).

§ 16. Ознакомленіе дѣтей съ тѣми ученіями о дѣлителяхъ и первоначальныхъ числахъ, которыя необходимы для построенія болѣе или менѣе серьезнаго курса дробей, представляетъ едва ли не самую трудную ступень всего курса ариѳметики низшихъ классовъ. Все затрудненіе состоитъ въ трудности такой постановки этихъ ученій, чтобы она вполнѣ удовлетворяла требованіямъ научности и въ то же время была доступна ученикамъ второго класса. Само собою разумѣется, что это возможно только при одномъ условіи, а именно при усвоеніи дѣтьми нѣкоторыхъ ученій (изъ теоріи чиселъ) *на-вѣру*. Въ подобномъ усвоеніи ученій, которыя во всей своей научно-доказательной силѣ недоступны учащимся, нѣтъ ничего предосудительнаго, если

*) Ср. § 8 гл. IX нашей „Методики ариѳметики“, имѣющей въ виду начальную школу (М. 1886).

**) Въ курсѣ I-го класса ср. уч. заведенія входить еще „ознакомленіе съ простѣйшими дробями“. Въ чемъ можетъ состоять это ознакомленіе— см. § 17 этой главы.

только дѣти понимаютъ, что они такія-то и такія-то ученія принимаютъ на-вѣру и что они, понимая ихъ смыслъ, все-таки доказывать ихъ не умѣютъ.

Въ ученіи о признакахъ дѣлимости чиселъ („Уч. ар.“ § 53—59) безъ доказательства могутъ и должны быть приняты основныя предложенія, на которыхъ зиждется ученіе о признакахъ дѣлимости, а равно признаковъ дѣлимости чиселъ на 6. Сказанныя теоремы состоятъ въ слѣдующемъ:

1) Если каждое изъ чиселъ a , b , c и т. д. дѣлится на m , то сумма

$$a+b+c+\dots$$

тоже дѣлится на m ;

2) Если дано $m \times n$, и если m дѣлится на какое-нибудь число a , то и произведение $m \times n$ дѣлится на a .

3) Если a дѣлится, а b не дѣлится на m , то сумма $a+b$ тоже не дѣлится на m .

Эти теоремы могутъ и должны быть на интересующей насъ ступени обученія (во II-мъ классѣ) принимаемы, повгорнемъ, безъ доказательства по слѣдующимъ причинамъ: а) онѣ вполнѣ очевидны, и б) доказательства ихъ, именно вслѣдствіе очевидности самыхъ теоремъ, совершенно непонятны дѣтямъ; болѣе того: дѣтямъ, какъ извѣстно, непонятна возможность и необходимость доказательства такихъ истинъ, которыя до очевидности понятны, а выше намѣченныя предложенія принадлежатъ именно къ числу очевидныхъ.

Не останавливаясь на всѣхъ признакахъ дѣлимости чиселъ, мы должны о признакѣ дѣлимости на 6 замѣтить, что онъ можетъ и долженъ быть усвоенъ учащимся тоже на-вѣру (если только вообще невозможно его исключить изъ курса); по причина этого совсѣмъ иная: дѣло въ томъ, что для его *строгаго* доказательства требуется полное пониманіе условія дѣлимости цѣлаго числа на произведеніе двухъ взаимно-первыхъ чиселъ,—что почти невозможно для ученика II кл.; не строгое же доказательство этого признака, если только считать нестрогое доказательство—доказательствомъ, никакой логически-развивательной силы въ себѣ не заключающаго и можетъ оказать на умъ учащагося довольно вредное, расшатывающее мысль его, вліяніе вслѣдствіе своей неполноты и неточности. Путемъ такъ наз. „простыхъ“ разсужденій можно убѣдиться только въ томъ, что если число дѣлится на 6, то оно дѣлится и на 2, и на 3; но обратнаго предложенія путемъ такихъ же разсужденій доказать нельзя, а именно нельзя доказать, что если число дѣлится и на 2, и на 3, то оно непременно дѣлится также и на 6 безъ остатка. Если бы дѣти могли повѣтъ, что они могутъ доказать необходимость извѣстнаго признака дѣлимости на 6, но не могутъ доказать его достаточ-

ность, то логическая сторона дѣла была бы въ нѣкоторой, весьма значительной степени, достигнута. Но, къ сожалѣнію, учащіеся второго класса именно этой логической тонкости понять не въ состояніи, а потому гораздо лучше такая постановка дѣла, при которой признакъ дѣлимости на 6 принимается учащимися на-вѣру (разъ ужъ безъ него, повторимъ, нельзя обойтись подобно тому, какъ это дѣлается во французскихъ учебникахъ, гдѣ онъ до-поры до-времени чаще всего совершенно игнорируется). Изъ остальныхъ признаковъ дѣлимости чисель достойны особеннаго вниманія преподавателя тѣ особенные признаки дѣлимости на 4 и на 8, на которыхъ мы не останавливаемся, такъ какъ они изложены въ замѣчаніяхъ 2-мъ и 3-мъ къ § 55 нашего „Уч. ар.“

Но, кромѣ ученія о признакахъ дѣлимости чисель, въ курсъ II-го класса обыкновенно входятъ первоначальныя понятія объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чисель. Теорія общаго наибольшаго дѣлителя имѣетъ весьма мало приложений къ тому ученію о дробяхъ, которое подлежитъ усвоенію во II-мъ классѣ; поэтому лучше всего было бы совершенно исключить эту теорію изъ курса низшихъ классовъ. Но если невозможно обойтись безъ осколковъ этой теоріи (она, впрочемъ, не можетъ считаться обязательною, такъ въ программахъ ср. уч. зав. о ней даже не упоминается), то несомнѣнно должно стремиться къ возможной экономіи времени и силъ учащихся при прохожденіи первоначальныхъ ученій объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ. Учащій долженъ по возможности себя ограничивать: онъ не имѣетъ права забывать, что научныя основы теоріи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ или нѣсколькихъ чисель дѣтямъ совершенно недоступны и что только искусство нахождения общаго наибольшаго дѣлителя, практическіе его приемы, болѣе или менѣе доступны учащемуся II-го класса. Такое самоограниченіе со стороны учащаго тѣмъ дозволяетъ, что ученіе объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ рѣдко примѣняется, какъ это замѣчено выше, въ дальнѣйшемъ практическомъ курсѣ ариметики, хотя теоретическое его значеніе громадно. Онъ не имѣетъ права забывать, что увлеченіе теоретическими перспективами этой теоріи было бы совершенно не согласно ни съ требованіями программъ, ни съ имѣющеюся налицо, на данной ступени обученія, подготовкою дѣтей къ отвѣченному математическому мышленію. Теоріи общаго наибольшаго дѣлителя и даже правиламъ его нахождения, строго говоря, мѣсто при повтореніи ариметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав. (Ср. „Доп. Ст.“ нашего „Уч. ар.“). Что касается ученія о наименьшемъ кратномъ двухъ или нѣсколькихъ чисель, то и оно должно быть пройдено во II-мъ кл. чисто-практически, безъ теоремъ и безъ выясненія зависимости

между общимъ наибольшимъ дѣлителемъ и наименьшимъ кратнымъ числомъ. Обойтись безъ учения о наименьшемъ кратномъ числѣ при прохожденіи статьи о приведеніи дробей къ одному знаменателю почти невозможно; но тѣмъ не менѣе, при изложеніи учения о наименьшемъ кратномъ числѣ, не должно особенно увлекаться теоретическими элементами этого учения. Точно такимъ же, практическимъ, характеромъ должны отличаться тѣ свѣдѣнія въ теоріи первоначальныхъ чиселъ, которыя при этомъ могутъ и должны быть излагаемы. (II, 826—900, и Смѣш. зад. №№ 121—130). Особенныхъ методическихъ указаній эта ступень курса не требуетъ. Въ видѣ упражненій надъ разложеніемъ чиселъ на первоначальныхъ множителей могутъ быть, съ большою пользою, предложены слѣдующія двузначныя и трехзначныя числа, кажушіяся съ перваго взгляда первоначальными:

$$\begin{array}{lll}
 51=3\times 17 & 117=9\times 13 & 133=7\times 19. \\
 57=3\times 19 & 119=7\times 17 & 141=3\times 47. \\
 87=3\times 29 & 121=11\times 11 & 143=11\times 13. \\
 91=7\times 13 & 123=3\times 41 & 147=3\times 49. \\
 & 129=3\times 43 &
 \end{array}$$

Въ особенности полезно въ устныхъ вычисленіяхъ брать числа изъ этой небольшой таблицы.

Изъ всего выше изложеннаго очень легко вывести, что наиболѣе умѣстна такая постановка учения о дѣлителяхъ и сопрягающихся съ нимъ учений, при которой въ низшихъ классахъ проходятся только практическая сторона этихъ учений, а теорія всецѣло отнесена въ повторительный курсъ ариѳметики въ одномъ изъ высшихъ классовъ.

§ 17. Въ курсъ ариѳметики I-го класса классической гимназіи и реального училища отнесено, согласно „Уч. Планамъ“, ознакомленіе съ простѣйшими дробями. Это требованіе допускаетъ весь разнообразное толкованіе, но несомнѣнно, что подъ „ознакомленіемъ“ съ простѣйшими дробями нельзя разумѣть систематическое изученіе дробей, ихъ основныхъ свойствъ и дѣйствій надъ ними. Отъ этого ознакомленія можно требовать только слѣдующаго: 1) усвоенія представленія о дробѣ какъ совокупности равныхъ между собою долей единицы, 2) усвоенія дѣтьми способа письменнаго обозначенія дробей, и 3) усвоеніе простѣйшихъ взаимныхъ отношеній между дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Въ „Метод. Сборникѣ“ нашемъ мы не нашли возможнымъ помѣстить, кромѣ тѣхъ упражненій, которыя имѣютъ въ виду полный курсъ дробей, также и отдѣльныя первоначальныя упражненія надъ дробными числами. Но мы надѣемся, что въ числѣ упражненій надъ обыкновенными дробями (II, 901—1520) найдутся и такія, которыя пре-

подаватель, может быть, сочтетъ умышленными для „ознакомленія съ простѣйшими дробями“; вообще указанныя упражненія преслѣдуютъ совсѣмъ иную цѣль.

Для лицъ, которые пожелали бы уяснить себѣ, въ чемъ состоитъ интересующее насъ ознакомленіе учениковъ I-го класса съ простѣйшими дробями, представляемъ примѣрный порядокъ относящихся сюда упражненій, каковыхъ учащихъ можетъ придумать очень много, если онъ только уяснитъ себѣ цѣль ихъ:

Вотъ листъ бумаги; разрываю его пополамъ; эта часть—*половина*. А эта? Путь-листа да путь-листа что составлять? *) Отецъ *раздѣлитъ* яблоко на двѣ одинаковыя части; одну часть отдастъ сыну, а другую—дочери. Какую часть яблока получилъ сынъ и какую—дочь? Мальчикъ получилъ отъ матери яблоко; *половину* его онъ съѣлъ. Какая часть яблока у него осталась? Вотъ два полулиста бумаги! Каждый изъ этихъ полулистовъ я разрываю пополамъ; получаю четыре четвертушки бумаги. Сколько было въ полулистѣ четвертушекъ? Вотъ одна четвертушка бумаги, она составляетъ одну *четверть*, одну *четвертую* долю листа: вотъ еще одна четверть. Какую долю листа составляетъ четверть его и еще одна четверть? Вотъ четверть листа бумаги; вотъ еще одна четверть и вотъ еще одна. Сколько всего здѣсь четвертей листа? (Три). **) Къ тремъ четвертямъ листа прибавляю еще одну четверть. Сколько я получу листовъ бумаги? Отъ полуста отрѣзана четверть листа и отдана кому нибудь изъ васъ. Какая доля листа осталась у меня? Что больше: одинъ листъ бумаги или путь-листа? путь-листа или четверть его? путь-листа или три четверти? Можете-ли вы изобразить число „три“ помощью цифры? (Можемъ). Запишите! Что здѣсь написано? (Три!) Я хочу изобразить три *четверти*; вотъ я и поставлю подъ цифрой 3 черточку, а подъ чертой—цифру 4. Эта черточка и цифра 4 обозначаютъ, что число раздѣлено на 4 одинаковыя (равныя) части. Если вы увидите гдѣ нибудь въ книгѣ цифру 3, подъ ней черту, а подъ чертой цифру 4, то знайте, что все это обозначаютъ *три четверти*.—Повторите—какъ изобразить три четверти помощью цифръ.—Что обозначаетъ цифра 3? Что обозначаютъ черта и цифра 4 подъ нею? А какъ написать двѣ четверти? Одну четверть? Четыре четверти? Шесть четвертей? Семь четвертей? ***) А сколько половинокъ составляютъ двѣ чет-

*) Пока дѣти еще не усвоили себѣ понятія о единицѣ, какъ цѣломъ, не слѣдуетъ упреждать слова „цѣлый“. Дѣло въ томъ, что дѣти смѣшиваютъ слова „цѣлый“ и „цѣльный“; а поэтому учить ихъ тому, что путь-листа да путь-листа составляетъ цѣлый листъ, не целесообразно да и не вѣрно, такъ какъ путь-листа да путь-листа составляютъ вовсе не цѣлый листъ, а только *однѣ* листъ.

**) Дѣти должны отвѣчать либо полнымъ отвѣтомъ, либо самымъ сокращеннымъ, какой только возможенъ: средина въ этихъ случаяхъ не заслуживаетъ сочувствія. Дѣло въ томъ, что если спрашиваютъ сколько четвертей въ половинѣ, то отвѣтъ „двѣ четверти“ можетъ быть истолкованъ такъ, что въ половинѣ четвертей двѣ четверти, что не вѣрно или, по меньшей мѣрѣ, неясно. Вообще не совсѣмъ полный и не совсѣмъ краткій отвѣтъ, какъ мы о томъ уже говорили въ другомъ мѣстѣ, можетъ подаваться и часто подается многочисленныя поводы къ недоразумѣнію.

***) Больше всего неудобствъ представляетъ яготъ урокъ, если ученикъ знаетъ слово „четверти“, какъ слово, обозначающее мѣру смущихъ тѣлъ. Эти неудобства должны быть устранены съ самаго начала. Кроме того, должно замѣнить, что всѣ дроби должны быть обозначаемы какъ учащійся, какъ и учащимъ съ помощью горизонтальной черты, а не косой.

верти? Четыре четверти? Чтобы получить одну половину, на сколько одинаковых частей надо раздѣлить *цѣлое*? (На двѣ одинаковыя части). Половина помощью цифръ изображается такъ: $\frac{1}{2}$. Цифра 1 обозначаетъ, что взята *одна* половина, а цифра 2, что *цѣлое* раздѣлено на двѣ равныя части. Я пишу: $\frac{3}{4}$. Что здѣсь обозначаетъ цифра 3? (Цифра 3 обозначаетъ, что вы хотѣли изобразить *три* четверти). А что обозначаютъ черта и цифра 4 подъ чертою? (Черта и цифра 4 подъ нею обозначаютъ, что *цѣлое* раздѣлено на 4 одинаковыя части). Какъ изобразить одну половину? двѣ половины? три половины? Сколько въ половинѣ четвертей? (Двѣ). Запишите: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Сколько составить: $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$? $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$? $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$? $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$? $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$? $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$? $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$? $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$? $2\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$? $\frac{1}{2} + 3$? $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$? $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$? $\frac{3}{4} - 1$? $1 - \frac{1}{2}$? $1 - \frac{1}{4}$? $1 - \frac{3}{4}$?
Сколько составить: $\frac{1}{2} - 1$? $1 - \frac{1}{2}$? $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$? $1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$? $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$? $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$?
Сколько сослагать: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$? $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$? $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$? $\frac{1}{2} - 1$? $\frac{3}{4} - 1$? $\frac{1}{4} - 1$? $1\frac{1}{2} - 1$?
 $1\frac{1}{4} - 1$? $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$? $2\frac{1}{4} - 1$? $2\frac{1}{2} - 1$? $2\frac{3}{4} - 1$? $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4}$? $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$?
 $2\frac{3}{4} - 1$? Сколько будетъ: $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$? $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$? $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ и т. д.

Способъ обозначенія обыкновенныхъ дробей не требуетъ какихъ либо отдѣльных замѣчаній: онъ усваивается учащими сравнительно скоро. Гораздо болѣе трудностей представляетъ ученіе объ измѣненіи и о преобразованіяхъ дробей, извѣстныхъ подъ именемъ сокращенія и приведенія дробей къ одному знаменателю. Въ особенности трудности эти велики, когда на дробь смотрятъ только какъ на совокупность нѣкотораго числа равныхъ между собою долей единицы. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ легко выясняется только увеличеніе и уменьшеніе дроби во столько же разъ, во сколько разъ увеличенъ или уменьшенъ числитель ея; всѣ же прочія измѣненія дроби, при сказанномъ взглядѣ на нее, очень медленно поддаются усвоенію, такъ какъ разсужденія, при этомъ употребляемыя, не отличаются особенною ясностью и доказательностью. То же справедливо относительно упоминаемыхъ выше преобразованій обыкновенной дроби. Въ виду вышеизложеннаго раѣе прохожденія ученія объ измѣненіяхъ и преобразованіяхъ дробей слѣдуетъ ознакомить съ тѣмъ взглядомъ на дробь, по которому каждая дробь можетъ быть разсматриваема какъ частное, происходящее отъ раздѣленія числа, равнаго числителю, на столько равныхъ между собою частей, сколько единицъ въ знаменателѣ. Для этой цѣли лучше всего сначала брать дроби именованныя, а не отвлеченныя, и за точку исхода принимать дроби *аликвоотныя*, т. е. дроби, числители которыхъ равны единицѣ. Что $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ какой либо единицы мѣры (аршина, фунта и т. п.) представляютъ собою частное, происходящее отъ раздѣленія одного аршина, фунта и т. п. на 3, 4 или 5 равныхъ между собою частей—въ томъ дѣти убѣждаются скоро, если ими

усвоено хотя бы только самое первоначальное представление о *доли*. На дроби неаллиquotная должно быть въ такомъ случаѣ распространено учение объ измѣненіи частнаго въ зависимости отъ измѣненія дѣлимаго, — что, съ логической точки зрѣнія, не особенно затруднительно. За то весьма затруднительно для дѣтей ясное пониманіе факта, что $\frac{1}{3}$ пяти аршинъ *отыствительно* равна $\frac{5}{3}$ одного аршина, что $\frac{1}{7}$ трехъ фунтовъ *дѣйствительно* то же, что $\frac{3}{7}$ одного фунта, и т. п. Для прочнаго установленія этого факта, къ сожалѣнію, недостаточно однихъ только логическихъ приемовъ, когда имѣешь дѣло съ дѣтми; дѣти склонны разсуждать совсѣмъ иначе: такъ-то оно такъ (отъ увеличенія дѣлимаго частное увеличивается, и т. д.), но непонятно—почему оно на самомъ дѣлѣ такъ, а не иначе. Хотя бы они даже и не формулировали своихъ сомнѣній въ такой именно формѣ (для чего требуется довольно высокое діалектическое развитіе), но это сомнѣніе тѣмъ не мѣнѣ ихъ угнетаетъ, и увѣренности въ справедливости равенствъ:

2 руб.: 7 = $\frac{2}{7}$ р., 3 ар.: 4 = $\frac{3}{4}$ ар. и 5 фунт.: 7 = $\frac{5}{7}$ фунт.
у нихъ нѣтъ до тѣхъ поръ, пока они не убѣдились путемъ долгихъ упражненій въ ихъ справедливости. Причина этихъ трудностей заключается въ томъ, что учащимся на этой ступени не исполнѣ ясно распредѣлительный (дистрибутивный) законъ дѣленія по отношенію къ сложенію, — законъ, по которому вообще

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m)$$

и по которому въ частности

$$(1 + 1 + 1) : 4 = (1 : 4) + (1 : 4) + (1 : 4).$$

Для выясненія затрудняющаго насъ момента въ ученіи о дробяхъ нѣкоторые прибѣгаютъ къ слѣдующимъ разсужденіямъ: пусть требуется раздѣлить 3 аршина на 7 равныхъ частей; если бы мы раздѣлили каждый аршинъ на 7 равныхъ частей, то мы получили бы въ результатѣ $\frac{1}{7}$ аршина; стало-быть, отъ каждаго аршина получается $\frac{1}{7}$ аршина, а отъ 3-хъ аршинъ должно получиться $\frac{3}{7}$ арш. Но это „разсужденіе“, строго говоря, почти ничего не выясняетъ, такъ какъ учащійся представляетъ себѣ 3 аршина какъ одно цѣлое, а не какъ совокупность трехъ отдѣльныхъ единицъ. Гораздо лучше обратиться къ распредѣлительному закону и, исходя изъ случая, когда каждое изъ частныхъ, происходящихъ отъ раздѣленія каждаго изъ слагаемыхъ, есть число цѣлое, перейти прямо къ случаю, когда каждое изъ слагаемыхъ есть единица, а частное аллиquotная доля. Кромѣ того, *conditio sine qua non* рекомендуемой постановки курса дробей является цѣлый рядъ устныхъ упражненій, преслѣдующихъ усвоеніе дѣтми свѣдѣній слѣдующаго типа: $\frac{1}{3}$ пяти единицъ равна $\frac{5}{3}$ одной

единицы, $\frac{1}{3}$ трех единиц равно $\frac{3}{3}$ одной единицы, $\frac{1}{4}$ одной единицы равно $\frac{1}{4}$ шести единиц, и т. п. (II, 901—930). Таким образом усвоение богатого последствием и полезного для дальнейших ступеней обучения понятия о дроби, как частномъ, тѣснѣе связано съ умѣемъ отыскивать любыя адекватныя доли любыхъ цѣлыхъ чиселъ. На этой же ступени умѣсны выражения въ такъ назыв. исключеннн цѣлаго числа изъ неправильной дроби, обращенне смѣшаннаго числа въ неправильную дробь и выраженне цѣлыхъ чиселъ въ разныхъ доляхъ единицы. (II, 931—940).

Учене объ увеличенн и уменьшенн обыкновенныхъ дробей въ цѣлое число разъ весьма легко усвоивается, если въ основу этого ученн положено разсмотрѣнное выше понятие о дробномъ числѣ какъ частномъ, происходящемъ отъ раздѣленн числа, равнаго числнтелю дроби, на столько равныхъ частей, сколько единиц въ знаменателѣ; поэтому мы на сказанномъ ученн не останавливаемся, присовокупивъ, что всякая иная постановка дѣла влечетъ за собою часю непреодолимая помощьюъ рассужденн затруденнн. Ибо несомнѣнно, что дѣлать далеко недоступно ясное пониманне того факта, что $\frac{1}{15}$, напр., въ 5 разъ меньше, чѣмъ $\frac{1}{3}$, такъ какъ ихъ воображенн и сужденн весьма мало помогаетъ рассужденн, основанное на томъ, что $\frac{1}{15}$ содержится въ единицѣ 15 разъ, а $\frac{1}{3}$ —только 3 раза, что въ $\frac{1}{3}$ поэтому пять пятнадцатыхъ и что, стало-бытъ, $\frac{1}{15}$ меньше одной трети ровно въ 5 разъ. Не меньше трудностей представляетъ собою также выясненне сокращенн дроби и дозволительности умноженн членовъ ея на одно и то же цѣлое число, если въ основу этихъ ученн не положено понятие о дроби, какъ объ извѣстномъ образомъ полученномъ частномъ. Въ этихъ случаяхъ, равно какъ и въ пѣкоторыхъ другихъ, можетъ, правда, оказатъ весьма полезною аналогия между дробью и именованнымъ числомъ, при чемъ сокращенне дроби тогда аналогично превращенн, а умноженне числнтеля и знаменателя не на одно и то же число раздробленн именованнаго числа; но, къ сожалѣнн, этотъ взглядъ на дробное число не обладаетъ такою же примѣнимостью ко всякаго рода вопросамъ, какою отличается строго-научный взглядъ на дробь какъ на частное. Впрочемъ, въ рукахъ опытнаго преподавателя сближенне ученн о дробяхъ съ ученемъ объ именованныхъ числахъ, безъ сомнѣнн, иногда можетъ привести къ весьма хорошимъ результатамъ *). Усвоенне ученн объ измѣненнхъ и неизмѣнимости дробей должно во всякомъ случаѣ со-

*) Считаеь прнятнымъ долоеь своимъ выразнть свою искреннюю благодарность достопоченному В. А. Росснбергу, обратившему наше

проводятся весьма многочисленными выражениями (II, 941 — 1015 и 1016—1030).

Изъ всѣхъ измѣненій дроби особенныя затрудненія представляетъ то измѣненіе, которое является результатомъ прибавленія къ обоимъ членамъ или вычитанія изъ нихъ одного и того же числа. Теорія этого измѣненія можетъ быть изложена либо въ связи съ ученіемъ о пропорціяхъ, либо же съ помощью алгебраическаго языка; поэтому полное изложение этого ученія неумѣстно на интересующей насъ ступени обученія. Но гдѣ не менѣе, въ виду необычайной склонности учащихся къ ошибочному пониманію фактовъ этого ученія и во избѣжаніе неясностей, получающихся при игнорированіи этого ученія во всемъ курсѣ дробей, необходимо ознакомить учащихся съ двумя фактами (которые они должны усвоить себѣ на упражненіяхъ, чисто эмпирически): 1) что отъ прибавленія къ обоимъ членамъ дроби или отъ вычитанія изъ нихъ одного и того же числа отличающаяся отъ единицы дробь (правильная или неправильная) *измѣняется*, и 2) что это измѣненіе зависитъ отъ измѣненія частнаго при одновременномъ прибавленіи къ дѣлителю и дѣлямому и при одновременномъ вычитаніи изъ дѣляемаго и дѣлителя одного и того же числа.— Предоставляя дальнѣйшее развитіе интересующаго насъ измѣненія такту преподавателя, мы должны замѣтить, что во всякомъ случаѣ полное игнорированіе этого измѣненія недозволительно ни въ какомъ случаѣ. Въ „Мет. Сб.“ падемъ и въ падемъ „Уч. ар.“ мы, впрочемъ, не посвятили этому ученію ни одной строки, желая представить въ этомъ дѣлѣ преподавателю полную свободу дѣйствій *).

Вниманіе на многочисленныя выводы этого послѣдняго взгляда и вообще не оказывавшему намъ въ своихъ компетенціяхъ совѣтъ и указанійхъ.

*) Изъ аналитическихъ изслѣдованій интересующаго насъ вопроса наиболее изыщымъ является то, которое основано на алгебраическомъ изслѣдованіи условий, при которыхъ

$$1) \frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}, \quad 2) \frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}, \quad 3) \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b},$$

$$4) \frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b}, \quad 5) \frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad 6) \frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b}.$$

Съ помощью весьма простыхъ преобразованій (приведенія обѣихъ частей равенства или неравенства къ одному знаменателю и уничтоженія общаго знаменателя и т. п.) необычайно просто приходимъ къ заключенію, что только правильная дробь равная единицѣ не измѣняется отъ прибавленія или отниманія поровну, что только правильная дробь увеличивается, а неправильная уменьшается отъ прибавленія къ обоимъ членамъ ея поровну, и что, наконецъ, только неправильная дробь увеличивается, а правильная уменьшается отъ вычитанія изъ членовъ ея одного и того же числа — къ сожалѣнію арифметика не знаетъ ничего подобнаго этому изслѣдованію, и это послѣднее приходится отложить до ознакомленія учащихся съ алгебраическою теоріею дробей

§ 18. Ученіе о нахожденіи опредѣленной части даннаго цѣлаго и всего цѣлаго по данной части его принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ на практикѣ и въ теоріи дробей: на практикѣ эти умѣнія важны по причинѣ часто встрѣчающейся въ нихъ надобности, въ теоріи же—по причинѣ тѣснѣйшей связи этого ученія съ теоріею умноженія и дѣленія на дробное число. Кромѣ того ученіе о нахожденіи частей цѣлаго крайне важно для прочнаго установленія понятія о дроби какъ частномъ, — понятія, какъ мы это видѣли выше, крайне важнаго для построенія дальнѣйшаго курса. Интересующія насъ ученія принадлежатъ къ числу разработанныйшихъ и простѣйшихъ съ методической точки зрѣнія, а потому на методической проработкѣ ихъ останавливаться не будемъ, напоминая только о томъ, что учащій никогда не долженъ забывать, что рѣшеніе задачи на нахожденіе части цѣлаго можетъ быть рассматриваемо и впоследствии рассматривается какъ умноженіе, а нахожденіе цѣлаго по частямъ — какъ дѣленіе. Только на два пункта считаемъ необходимымъ обратить вниманіе учащаго: во 1-хъ, на то, что раздробленіе и превращеніе простыхъ и составныхъ именованныхъ чиселъ тѣснѣе соприкасаются съ интересующими насъ ученіями и, во 2-хъ, что особенное вниманіе должно быть обращено на дозволительность перемѣны порядка множителей, т. е. на то, что $\frac{3}{7}$ пяти шестыхъ то же, что $\frac{5}{8}$ трехъ седьмыхъ, что $\frac{3}{8}$ пяти седьмыхъ и что $\frac{7}{8}$ трехъ шестыхъ, и т. п. Кромѣ развивательнаго значенія, это свойство оказывается весьма полезнымъ для разъясненія дозволительности сокращенія каждаго изъ множителей числителя полученнаго результата съ любымъ изъ множителей знаменателя его. Само собою разумѣется, что вся эта статья требуетъ пестунаго и методическаго упражненія дѣтей въ вычисленіяхъ и что безъ соответствующихъ упражненій всяческія разъясненія и теоретическія перспективы могутъ только отнять много времени, не давъ достаточнаго количества полезныхъ навыковъ и умѣній. (II, 1031—1180).

§ 19. Ученію о первыхъ двухъ дѣйствіяхъ надъ дробными числами должно предшествовать ученіе о приведеніи дробей къ одному знаменателю. Прежде чѣмъ приступить къ упражненіямъ этого рода, учащіеся должны понять: 1) что всякая данная не во всякихъ доляхъ можетъ быть выражена и 2) что вѣтъ такихъ двухъ дробей, которыхъ нельзя было бы выразить въ одинаковыхъ доляхъ, умноживъ члены каждой изъ дробей на нѣкоторыхъ опредѣленныхъ, приличнымъ образомъ выбранныхъ, множителей. Упражненія въ опредѣленіи измѣненій дроби достаточно подготовили учащихся къ пониманію этихъ двухъ фактовъ, а потому достаточно нѣсколькихъ примѣровъ для того, чтобы учащіеся поняли ихъ сущность. Послѣ этого можно перейти къ соответствующимъ упражненіямъ. (II, 1181—1225).

Сложеніе и вычитаніе дробей не представляетъ никакихъ методическихъ трудностей, но при этомъ не должно забывать, что большинство упражненій надъ простѣйшими дробями (половинами, третями, четвертями и восьмыми) должны быть обязательно устными. Ибо крайне ненормальнымъ надо считать такую постановку дѣла, при которой учащійся для того, чтобы сложить половину съ третью или вычесть $\frac{1}{2}$ изъ трехъ четвертей, прибѣгаетъ къ приведенію дробей къ одному знаменателю и вообще выказываетъ слишкомъ большое пристрастіе къ письменному производству. Подобные примѣры учащійся должны раздѣлывать быстро, не прибѣгая къ совершенно излишнему въ данномъ случаѣ многописанію. (II, 1251—1260). Небезполезно упражнять учащихся на интересующей насъ ступени обученія въ разложеніи дробей на аликвотныя дроби съ разными знаменателями. Извѣстно, что всякая дробь, которой числитель больше 1-цы, можетъ быть разсматриваема какъ сумма двухъ или нѣсколькихъ аликвотныхъ дробей съ различными знаменателями. Такъ напр.,

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}, \quad \text{и т. п.}$$

Упраженія въ подобномъ разложеніи дробей на аликвотныя части весьма занимательны да и даютъ не мало поводовъ къ развитію быстрога соображенія и быстрыхъ умственныхъ вычисленій. (II, 1271—1275, 1676—1685).

Наибольшее количество методическихъ трудностей теоріи дѣйствій надъ дробными числами сосредоточено въ ученіяхъ о дѣйствіяхъ умноженія и дѣленія. Случаи цѣлаго множителю и цѣлаго дѣлителя, конечно, не представляютъ никакихъ особенныхъ затрудненій; за-то крайне затруднительно для учащихся усвоеніе того взгляда на отысканіе частей цѣлаго, по которому оно представляетъ собою умноженіе, и тотъ взглядъ на отысканіе цѣлаго по частямъ его, по которому на это отысканіе можно смотрѣть какъ на дѣленіе. Для нѣкотораго облегченія этой трудности можно прибѣгнуть къ аналогіи, существующей между всѣми задачами на умноженіе и задачами на отысканіе части цѣлаго, а равно къ аналогіи между задачами на дѣленіе и задачами на отысканіе цѣлаго по частямъ его. („Уч. ар.“ § 73 и II, 1351—1365, 1369—1375, 1386—1400 и т. п.).

Съ помощью упражненій, подобныхъ указаннымъ выше, можно добиться совершенно правильнаго взгляда на дѣйствія умноженія и дѣленія на дробное число. Но при этомъ не должна быть забываема *условность* распространенія терминовъ „умноженіе“ и „дѣленіе“ на случаи, повидимому совершенно чуждые первоначальному смыслу этихъ терминовъ. Нахожденіе части цѣлаго и цѣлаго по частямъ его—это не дѣйствія надъ числами, а сово-

купность двухъ дѣйствій; но такой взглядъ вѣренъ только до тѣхъ поръ, пока нахожденіе частей цѣлаго не подведено подъ категорію умноженія, а нахожденіе цѣлаго по частямъ его — подъ категорію дѣленія. Сущность теоріи умноженія при дробномъ множителѣ и дѣленія при дробномъ дѣлителѣ до тѣхъ поръ не понята учащимися, пока они не вполне ясно понимаютъ, что

- 1) нахожденіе $\frac{1}{n}$ -ой числа p есть умноженіе числа p на $\frac{1}{n}$,
- 2) " " $\frac{m}{n}$ -ыхъ " p " " " " p на $\frac{m}{n}$,
- 3) " " цѣлаго, $\frac{1}{n}$ -ая котораго равна p , есть дѣленіе p на $\frac{1}{n}$,
- и 4) " " $\frac{m}{n}$ -ыхъ " " p , " " p на $\frac{m}{n}$.

Главнѣйшая трудность всего ученія объ умноженіи и дѣленіи на дробь обуславливается тѣмъ, что дѣти привыкли съ умноженіемъ свивывать понятіе объ увеличеніи множимаго, а съ дѣленіемъ—понятіе объ уменьшеніи дѣлимаго. Поэтому на сказанную трудность учащихся долженъ обращать особенное вниманіе учащихся, и притомъ не должно переходить къ новымъ упражненіямъ, пока вполне, до тонкости, не рассмотрѣнъ вопросъ о величинѣ произведенія и частнаго для каждаго изъ упражненій.

Ученіе о кратномъ сравненіи дробныхъ чиселъ должно быть пройдено отдѣльно отъ ученія о томъ случаѣ дѣленія, котораго цѣль заключается въ отысканіи множимаго по данному произведенію и данному множителю. Выше нами изложенное относится только къ этому послѣднему случаю дѣленія (т. е., если можно такъ выразиться, къ дѣленію на равныя части), ученіе же о кратномъ сравненіи двухъ дробныхъ именованныхъ (или отвлеченныхъ) чиселъ предполагаетъ непременно отвлеченное частное и хотя находится въ довольно тѣсной связи съ рассмотрѣннымъ случаемъ дѣленія, но можетъ быть рассматриваемо въ связи съ приведеніемъ дробей къ одному знаменателю. Въ нашемъ „Уч. ар.“ (§ 74, замѣчаніе 4-е) изложена съ достаточною подробностью та точка зрѣнія на кратное сравненіе, при которой этотъ видъ дѣленія ставится въ тѣснѣйшую связь съ другимъ видомъ этого дѣйствія. Не останавливаемся на методическихъ трудностяхъ этого, единственно вѣрнаго съ научной точки зрѣнія, взгляда въ виду того, что учащій несомнѣнно легко ихъ устранить; при этомъ позволяемъ себѣ прямо сослаться на указанное мѣсто нашего „Учебника“. Что же касается способа кратнаго сравненія съ помощью приведенія дробей къ одному знаменателю, то совершенно его игнорировать не слѣдуетъ; но не слѣдуетъ также, если только возможно, ограничиваться однимъ только этимъ способомъ;

онъ слишкомъ специаленъ и не стоитъ въ достаточно тѣсной зависимости къ общей теоріи дѣленія какъ арифметическаго дѣйствія.

Кромѣ того, считаемъ нужнымъ замѣтить, что точное ученіе о крайномъ сравненіи приводитъ также къ тому взгляду на отвѣченную дробь, по которой дробь есть крайное отношеніе числа, равнаго числителью, къ числу равному ея знаменателю, — къ взгляду, въ высшей степени плотогворному въ математикѣ вообще въ и арифметикѣ въ частности. („Уч. ар.“ § 74, замѣчаніе 5-е.)

§ 20. Ученіе о десятичныхъ дробяхъ можетъ быть пройдено сначала въ зависимости отъ обозначенія десятичныхъ дробей въ видѣ дробей обыкновенныхъ. Такой способъ, безъ сомнѣнія, въ состояніи принести учащимся большую пользу, не отнявъ у нихъ слишкомъ много времени: учащіеся свыкаются съ мыслью о томъ, что дроби, знаменатели которыхъ представляютъ собою степень 10-ти, обладаютъ многими особенностями, и что дѣйствіи надъ такими дробями допускаютъ большія упрощенія. При этомъ не слѣдуетъ, впрочемъ, обыкновенную дробь, знаменатель которой есть какая нибудь степень 10-ти, называть *десятичной*, такъ какъ съ этимъ послѣднимъ терминомъ должно быть тѣснѣе связываемо понятіе объ особенномъ (по десятичной системѣ счисленія) обозначеніи ея. Когда учащіеся вполнѣ освоились съ интересующимъ насъ особеннымъ видомъ дробей и съ особенностями производства дѣйствій надъ ними, можно перейти къ обозначенію этихъ дробей въ видѣ десятичныхъ (т. е. безъ знаменателя и съ помощью приличныхъ образомъ поставленной запятой) и къ дѣйствіямъ надъ изображенными такимъ образомъ дробямъ.

Можно избрать и иной путь прохожденія ученія о десятичныхъ дробяхъ: можно начать со способовъ обозначенія (словеснаго и письменнаго) десятичныхъ дробей и съ дѣйствій надъ ними, когда они уже обозначены общепринятымъ способомъ, а потомъ перейти къ оправданію выведенныхъ правилъ на дробяхъ обыкновенныхъ. При этомъ способѣ прохожденія ученія о десятичныхъ дробяхъ въ основу всего обученія должна быть положена десятичная система счисленія со всеми ея особенностями и свойствами; потомъ на этой системѣ уже путемъ дедуктивнымъ строятся все ученія о десятичныхъ дробяхъ. Не подлежитъ сомнѣнію, что, несмотря на научныя достоинства этого пути, ему долженъ быть, хотя бы только въ самомъ началѣ, предпочтительнѣе при недостаточномъ развитіи класса способъ, замѣченный выше.

Изъ методическихъ особенностей каждаго изъ указанныхъ путей должна быть упомянута необходимость выработки совершенно ясныхъ представленій о различныхъ способахъ устнаго и письменнаго обозначенія десятичныхъ дробей („Уч. ар.“ §§ 75 и 76)

и объ измѣненіяхъ десятичной дроби въ зависимости отъ мѣста запятой. На этомъ основано все ученіе о дѣйствіяхъ надъ десятичными дробями, а потому временемъ, посвященнымъ выработкѣ ясныхъ представленій объ указанныхъ элементахъ курса, особенно скучиться не слѣдуетъ. Указавъ выше въ общихъ чертахъ сущность двухъ путей, которые могутъ быть избраны при прохожденіи въ ср. учебн. зав. ученія о десятичныхъ дробяхъ, мы должны перейти къ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями. Но изъ всѣхъ четырехъ дѣйствій мы подольше остановимся только на умноженіи, такъ какъ ученія о сложеніи и вычитаніи очень легко поддаются усвоенію.

Обычные способы производства умноженія и дѣленія основаны на ученіяхъ объ измѣненіи произведенія при измѣненіяхъ множимаго и множителя и объ измѣненіи частнаго при измѣненіяхъ дѣлимаго и дѣлителя. На этихъ способахъ здѣсь останавливаться, конечно, не мѣсто. Мы желаемъ коснуться здѣсь того способа умноженія, о которомъ Лагранжъ говоритъ въ одной изъ своихъ не разъ упоминаемыхъ выше лекцій. Этотъ способъ основанъ на неизмѣняемости произведенія при одновременномъ увеличеніи множителя и уменьшеніи множимаго въ одно и то же число разъ; притомъ, этотъ способъ отличается тою особенностью, что если множитель есть число смѣшанное, то не надобно прибѣгать ни къ какимъ измѣненіямъ данныхъ чиселъ, и все дѣло сводится, можно сказать, только къ приличной записи множителя подъ множимымъ. Лагранжъ приводитъ слѣдующій примѣръ: пусть требуется умножить 437,25 на 27,34. При этомъ подишемъ множителя подъ множимое такъ, чтобы цѣлыя единицы перваго разряда множителя были записаны подъ послѣднею цифрою множимаго; кромѣ того умноженіе начинаемъ съ наивысшей цифры множителя и низшую цифру произведенія записываемъ подъ соотвѣтствующею цифрою множителя. Тогда очевидно, что запятая въ произведеніи должна находиться въ одномъ столбцѣ съ запятою множимаго. Обращаемъ особенное вниманіе благосклоннаго читателя на этотъ способъ умноженія десятичной дроби на десятичную, тѣмъ болѣе, что въ „Учебникѣ“ нашемъ мы его не излагаемъ. Преимущества этого способа громадны: онъ требуетъ только правильной записи и весьма удобенъ даже для приближеннаго вычисленія, такъ какъ при этомъ способѣ весьма легко увидѣть—какія цифры частныхъ произведеній не подлежатъ опредѣленію при данной степени точности. Въ случаѣ если оба числа суть дроби правильныя, въ одномъ изъ нихъ (гдѣ это удобнѣе) можно перенести запятую на столько знаковъ вправо, чтобы получилось число смѣшанное; въ другомъ же, во избѣжаніе поправокъ въ полученномъ такимъ образомъ произведеніи, въ такомъ случаѣ надо пе-

$$\begin{array}{r}
 437,25 \\
 \times 27,34 \\
 \hline
 8745,0 \\
 3060,75 \\
 131,175 \\
 17,4900 \\
 \hline
 11954,4150
 \end{array}$$

перенести запятую вправо на столько же знаковъ. Напр., пусть требуется умножить 0,3758 на 0,255. Перенеси запятую въ множителѣ вправо, а въ множимомъ — влѣво на одинъ знакъ, и записавъ оба числа приличнымъ образомъ (т. е. единицы множителя подъ послѣднею цифрою множимаго), получимъ въ первомъ частномъ произведеніи 0,07516, а во всемъ произведеніи 0,0958290, причеиъ запятая вовсе не отбрасывалась и причеиъ, вообще, можно достигнуть большихъ выгодъ въ вычисленіи.

Этотъ способъ умноженія тѣмъ удобнѣе и педагогичнѣе, что обычный способъ дѣленія десятичной дроби на десятичную же основанъ тоже на принципѣ неизмѣняемости. Но на этомъ способѣ дѣленія мы не считаемъ нужнымъ останавливаться: онъ сводится къ перенесенію занятой въ дѣлномъ и дѣлителѣ вправо ровно на столько знаковъ, на сколько это необходимо для того, чтобы дѣлитель сдѣлался числомъ цѣлымъ, а частное получилось совершенно равное искомому. Считаемъ нужнымъ только предупредить, что способъ дѣленія, основанный на приведеніи дѣлимаго и дѣлителя къ одному знаменателю, не можетъ считаться способомъ вообще удобнымъ, такъ какъ въ случаяхъ, когда въ дѣлителѣ послѣ занятой меньше десятичныхъ знаковъ, чѣмъ въ дѣлномъ, этотъ способъ влечетъ за собою излишніе нули въ дѣлитель и вообще излишнее многословіе. Кроме того замѣтимъ, что при прохожденіи ученія о дѣленіи десятичной дроби на десятичную же необходимо учащимся сначала принять на-вѣру, что *иногда* дѣленіе приводитъ къ безконечному ряду цифръ въ частномъ. Несмотря на то, что эта особенность дѣленія можетъ быть довольно хорошо выяснена, сначала, повторимъ, можно удовлетвориться знаніемъ факта, такъ какъ загромождать ученіе о производствѣ дѣйствій теоретическими трудностями на-врядъ ли целесообразно. Впоследствии, когда трудности самаго производства дѣйствій будутъ всѣ преодолены и поняты учащимися, можно — въ связи съ ученіемъ объ обращеніи обыкновенныхъ дробей въ десятичныя — выяснитъ не только возможность, но и причину того, что въ частномъ получилась періодическая дробь: тогда это будетъ вполне уместно.

§ 21. Ученіе объ обращеніи обыкновенныхъ дробей въ десятичныя не представляетъ трудностей, пока не появились вопросы о числѣ цифръ въ періодѣ, о числѣ цифръ до періода въ смѣшанныхъ періодическихъ дробяхъ и вообще вопросы, сопрягающіеся съ теоретическими основами этого ученія. Еще труднѣе въ этомъ отношеніи ученіе объ отысканіи основной дроби, отъ обращенія которой въ десятичную получилась данная періодическая. Что періодическая дробь можетъ быть въ вычисленіяхъ замѣняема основною дробью, отъ обращенія которой въ десятич-

ную получилась данная периодическая, можетъ быть воиолѣ строго доказано, какъ извѣстно, только съ помощью теоріи предѣловъ, — теоріи, обыкновенно и не безъ основанія не излагаемой въ курсахъ арифметики. Но, помимо этого, не легко поддается усвоенію также и самый способъ отысканія основныхъ дробей, отъ обращенія которыхъ въ десятичныя получаютъ данныя периодическія дроби. Одинъ изъ этихъ способовъ, основанный на увеличеніи данной чистой периодической дроби во столько разъ, сколько это необходимо для полученія смѣшаннаго числа съ такимъ же періодомъ, не заслуживаетъ сочувствія по слѣдующимъ двумъ причинамъ: 1) мы не имѣемъ права увеличивать безконечную дробь по тому же правилу, по которому достигается увеличеніе дробей конечныхъ, и—что еще важнѣе 2) мы не знаемъ ни того—одинаково ли или неодинаково число періодовъ въ обѣихъ дробяхъ, нами получаемыхъ при этомъ способѣ, ни того—имѣемъ ли мы право дѣлать вычитаніе безконечныхъ дробей по тѣмъ же правиламъ, по которымъ дѣлается вычитаніе дробей конечныхъ. Съ помощью теоріи предѣловъ можно оправдать и выяснить дозвоительность интересующаго насъ способа; но безъ этого оправданія способъ этотъ такъ или иначе долженъ быть болѣе или менѣе принятъ на-вѣру. Поэтому гораздо удобнѣе способъ эмпирической, который хотя тоже долженъ быть принятъ на вѣру, но отличается гораздо большею очевидностью: это — способъ, основанный на разсмотрѣніи периодическихъ дробей, получаемыхъ отъ обращенія въ десятичныя дроби обыкновенныхъ вида:

$$\frac{a}{9}, \frac{b}{99}, \frac{c}{999}, \text{ и т. д.}$$

гдѣ a, b, c суть числа меньшія соответствующихъ имъ знаменателей. Лучше всего начать съ дробей

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9} \text{ и } \frac{8}{9}$$

съ тѣмъ, чтобы потомъ перейти къ дробямъ, напр., слѣдующаго вида:

$$\frac{1}{99}, \frac{7}{99}, \frac{10}{99}, \frac{17}{99}, \frac{83}{99} \text{ и } \frac{90}{99}$$

Послѣ достаточнаго количества упражненій въ этомъ направленіи можно перейти къ разсмотрѣнію чистыхъ периодическихъ дробей съ одною и двумя цифрами въ періодѣ; послѣ соответствующихъ упражненій въ обращеніи обыкновенныхъ дробей, которыхъ знаменатели обозначены большимъ количествомъ девятокъ, можно перейти къ отысканію отдѣльныхъ дробей, отъ обращенія которыхъ въ десятичныя получаютъ периодическія дроби

съ большимъ числомъ цифръ въ періодѣ. При этомъ, если возможно, слѣдуетъ показать учащимся, что всякую обыкновенную дробь, знаменатель которой есть число взаимно-простое съ 10-тью, можно изобразить въ видѣ дроби

$$\frac{a}{10^n - 1}$$

т. е. въ видѣ дроби, которой знаменатель равенъ одному изъ чиселъ: 9, 99, 999, 9 999, 99 999 и т. д. Такимъ образомъ учащіеся поймутъ, хотя и не будутъ въ состояніи доказать и объяснить, почему такъ важно разсмотрѣніе дробей

$$\frac{a}{9}, \frac{b}{99}, \frac{c}{999}, \frac{d}{9999} \text{ и т. д.,}$$

когда вопросъ касается нахождения основной дроби, отъ обращенія которой въ десятичную получается дробь періодическая. Кроме того они поймутъ, что это способъ общій, а не специальный.

Что касается ученія о смѣшанной періодической дроби, то при прохожденіи этого ученія учащіеся должны усвоить на вѣру возможность сведенія вопроса о смѣшанной періодической дроби къ вопросу о чистой періодической: для этого надо принять дозволительность увеличенія періодическихъ дробей по общимъ правиламъ и увеличить данную смѣшанную періодическую дробь въ приличное число разъ съ тѣмъ, чтобы въ дальнѣйшихъ своихъ разсужденіяхъ уже не забывать этого измѣненія дроби.

Несмотря на очевидную невозможность исполн. научной постановки ученія о періодическихъ дробяхъ на интересующей насъ ступени обученія, учащимся полезно упражнять въ разсматриваніи періодическихъ дробей не только съ точки зрѣнія, если можно такъ выразиться, естественнаго періода, но также съ точки зрѣнія періода искусственнаго. Такъ, періодическую дробь $0,222\dots$ можно разсматривать какъ дробь, которой періодъ равенъ 22, т. е. какъ дробь $0,(22)$ или какъ дробь $0,(222)$ или наконецъ какъ смѣшанную періодическую дробь

$$0, 2 (2) \text{ или } 0, 22 (222) \text{ и т. п.}$$

Точно также чистую періодическую дробь

$$0, 2387 2387 2387\dots$$

можно разсматривать какъ смѣшанную:

$$0, 23 (8723) \text{ или какъ } 0, 2 (3872) \text{ и т. п.}$$

При этомъ результаты обращенія этихъ дробей въ обыкновенныя не зависятъ отъ точки зрѣнія, съ которой мы смотримъ на дан-

ную периодическую дробь. По особеннаго вниманія заслуживаютъ, при прохожденіи ученія о периодическихъ дробяхъ, дроби, которыя можно разсматривать какъ приближенныя значенія данной периодической дроби: надо приучить учащихся къ пониманію различія, напр., между периодическою дробью

$0, 27 27 27\dots$

и дробями

$0, 2; 0, 27; 0, 272; 0, 2727; 0, 272727.$

Учащійся очень склонны забывать о томъ, что периодическая дробь есть дробь безконечная и что не всякая дробь съ нѣкоторымъ повторяющимся періодомъ цифръ есть дробь периодическая. Часто можно встрѣтить учащагося, который не понимаетъ, что дробь $0, 3333$ не есть дробь периодическая, хотя цифра 3 и повторяется въ ней нѣсколько разъ *): дѣти забываютъ слишкомъ часто, что периодическая дробь есть дробь прежде всего безконечная.

§ 22. Ученіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ не нуждается въ особенно подробномъ методическомъ освѣщеніи. Ученіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ арифметическихъ безъ всякаго вреда для дѣла (какъ это замѣчено еще Лагранжемъ) могло бы быть исключено изъ курса арифметики, такъ какъ приложений это ученіе не имѣетъ. Это ученіе можетъ быть пройдено какъ бы въ pendant къ ученію объ отношеніяхъ и пропорціяхъ геометрическихъ. Вообще же интересующая насъ статья, которая носитъ болѣе или менѣе алгебраическій характеръ, — съ этой точки зрѣнія является какъ бы работою подготовительною для изученія алгебраическаго языка и вообще языка формулъ, если можно такъ выразиться. Поэтому въ высшей степени важнымъ является приученіе дѣтей къ надлежащему чтенію этихъ спеціальныхъ формулъ. Когда дѣло касается арифметическихъ отношеній и пропорцій, то должно упражнять дѣтей въ разнообразномъ чтеніи формулъ этого послѣдняго рода. Такъ, на отношеніе $8 - 2 = 6$ они должны смотрѣть слѣдующимъ образомъ: а) 8 безъ 2-хъ равно 6-ти, б) 8 больше 2-хъ на 6; в) 2 меньше 8-ми на 6; г) разностное отношеніе 8-ми къ 2-мъ равно 6-ти; д) если изъ 8-ми вычесть 2, то получится 6. Пропорцію $8 - 3 = 12 - 7$ они должны умѣть читать слѣдующимъ образомъ: а) 8 больше 3 на столько же, на сколько 12 больше 7-ми; б) 3 меньше 8-ми на столько же, на сколько 7 меньше 12-ти; в) 3 меньше 8-ми на столько же, на сколько 12 больше 7-ми; г) 8 больше 3-хъ на

*) Теоретическія основы ученія о периодическихъ дробяхъ должны быть отнесены въ повторительный (теоретическій) курсъ арифметики. Въ „Дополнит. Статьяхъ“ нашего „Учебника“ этому ученію посвящены §§ 3—6 ст. VII-ой.

столько же, на сколько 7 меньше 12-ти; д) разность между 8-мью и 3-мя равна разности между 12-тью и 7-мью, и т. д.

Въ особенности подобныя упражненія важны при прохожденіи ученія о геометрическихъ отношеніяхъ и пропорціяхъ, такъ какъ способы чтенія здѣсь гораздо многочисленнѣе и богаче слѣдствіями. Такъ, напр., кратное отношеніе $18 : 2 = 9$ можетъ быть прочитано: 18 больше 2-хъ или 2 меньше 8-ми въ 9 разъ, въ 18-ти 2 содержится 9 разъ, 2 составляетъ одну девятую долю 18-ти; отношеніе $3 : 5 = \frac{3}{5}$ выражаетъ: 3 составляетъ $\frac{3}{5}$ пяти, въ 3-хъ единицахъ содержится $\frac{3}{5}$ доли 5-ти единицъ, 5 единицъ, помноженныхъ на $\frac{3}{5}$, дадутъ въ результатѣ 3, или же 5 составляетъ $\frac{5}{3}$ трехъ единицъ, и т. д. Когда учащимся будутъ вполне усвоены различныя значенія подобной записи, отысканіе неизвѣстнаго элемента геометрическаго отношенія не представитъ никакого затрудненія, а равнымъ образомъ понятіе будетъ смыслъ формулы, извѣстной подъ именемъ геометрической пропорціи. Формулы этого послѣдняго рода могутъ быть прочитаны разнообразнѣйшими способами. Такъ, пропорція $18 : 3 = 30 : 5$ можетъ быть прочитана такъ: а) 18 больше 3-хъ во столько же разъ, во сколько 30 больше 5-ти; б) 3 меньше 18-ти во столько же разъ, во сколько 5 меньше 30-ти; в) 18 больше 3-хъ во столько же разъ, во сколько 5 меньше 30-ти, или 3 меньше 18-ти во столько же разъ, во сколько 30 больше 5; г) 3 составляетъ такую же часть 18-ти, какую 5 составляетъ 30-ти; д) чтобы получить 18, три надо помножить на столько же, на сколько надо помножить 5, чтобы получить 30; г) въ 18 содержится 30 такихъ частей, какихъ въ 3-хъ единицахъ содержится 5; наконецъ, д) въ 30-ти содержится 18 такихъ же частей, какихъ въ 5 содержится 3.— Въ особенности трудно усвоеніе послѣднихъ двухъ точекъ зрѣнія, которыя крайне важны при рѣшеніи учащимися задачъ на правило пропорціональнаго дѣленія.

Изъ теоретическихъ элементовъ ученія о геометрическихъ пропорціяхъ мы здѣсь считаемъ нужнымъ упомянуть только о томъ, что всякая пропорція свидѣтельствуетъ о равенствѣ между собою нѣкоторыхъ двухъ отвлеченныхъ дробей и что, наоборотъ, равенство двухъ дробей между собою свидѣтельствуетъ о существованіи нѣкоторой геометрической пропорціи. Это отнюдь не должно быть игнорируемо при преподаваніи. Остальныя же ученія съ достаточною подробностью разработаны въ §§ 88—100 нашего „Учебника“ и въ §§ 1—5 ст. VIII отдѣла „Доп. Ст.“ Особенное вниманіе читателя обращаемъ на приложенія теоріи пропорцій въ сокращеннымъ вычисленіямъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ (напр., въ случаяхъ дѣленія на 125, 175, 225, 375, 525, 675,

875, 1125), хотя и не считаемъ необходимымъ здѣсь останавливаться на этихъ приложенияхъ (Ср. „Уч. ар.“ §§ 99—100).

§ 23. Въ нашемъ „Учебникѣ ариметики“ ученія о рѣшеніи задачъ на такъ называемыя тройныя правила изложены почти исключительно съ точки зрѣнія пропорцій, причемъ рѣшеніе задачъ даннаго типа съ точки зрѣнія способа приведенія къ единицѣ отнесено въ краткія замѣчанія объ этомъ способѣ и объ его примѣненіи къ данному частному случаю. Вообще раздѣляя тотъ взглядъ на задачи этого рода, по которому рѣшеніе ихъ съ помощью пропорцій не отличается ни естественностью, ни особенно большимъ развивательнымъ значеніемъ, мы тѣмъ не менѣе въ „Учебникѣ“ нашемъ и въ отдѣлѣ „Доп. Ст.“ посвятили именно примѣненію пропорцій къ рѣшенію задачъ интересующихъ насъ типовъ довольно много мѣста. Мы постарались изложить все примѣненія геометрическихъ пропорцій по возможности строго и полно, съ тѣмъ чтобы въ нашемъ „Опытѣ методики ариметики“, предназначенномъ для преподавателей математики въ ср. уч. зав., этому вопросу не посвящать уже ни одной строчки. Зато мы позволимъ себѣ здѣсь подольше остановиться на способѣ приведенія къ единицѣ.

Пока мы имѣемъ дѣло съ задачами на простое тройное правило, вся трудность заключается только въ томъ, что учащійся преувеличиваетъ простоту рѣшенія задачъ по этому способу и не представляетъ себѣ того, что способъ этотъ примѣнимъ не ко всякаго рода величинамъ, а только къ величинамъ, находящимся одна отъ другой въ пропорціональной зависимости. Во избѣжаніе такой ошибки сужденія надо по возможности часто переходить отъ задачъ съ прямо-пропорціональными величинами къ задачамъ, въ которыхъ входятъ величины обратно-пропорціональныя. Кроме того необходимо иногда, съ тою же цѣлью, предлагать задачи, въ которыхъ неизвѣстная величина вовсе не зависитъ отъ данныхъ или же находится не въ пропорціональной зависимости отъ нея; напр.: „разстояніе отъ Москвы до Твери двое пѣшеходовъ прошли въ теченіе 7-ми дней; въ теченіе сколькихъ дней то же разстояніе пройдутъ 5 пѣшеходовъ?“ или: „фунтъ свѣчей, которыхъ идетъ 5 на каждый фунтъ, стоитъ 25 коп.; что стоитъ фунтъ свѣчей, которыхъ идетъ 6 на фунтъ?“ или: „пудъ винтовъ известной величины стоятъ столько-то рублей; что стоятъ пудъ винтовъ, въ которыхъ всѣхъ каждаго вчетверо меньше?“ Когда учащійся пойметъ, что не все задачи привычнаго для него типа могутъ быть разрѣшаемы съ помощью приведенія къ единицѣ, одна изъ развивательнѣйшихъ и труднѣйшихъ сторонъ задачъ на простое тройное правило будетъ усвоена.

Что касается задачъ на сложное тройное правило, то при ихъ рѣшеніи должно имѣть въ виду слѣдующіе два пункта: 1) уча-

щѣся должны привыкнуть къ пониманію значенія одинаковости условій; поэтому не бесполезно иногда обращаться къ задачамъ съ нѣсколькими условіями, изъ которыхъ всѣ, за исключеніемъ одного, одинаковы, но при этомъ всѣ выражены вполнѣ; кромѣ того, ранѣе уже разрѣшенныя задачи на простое тройное правило могутъ быть осложняемы не имѣющимися въ нихъ условіями, но съ тѣмъ, чтобы одинаковыя условія были точно охарактеризованы; на почвѣ такихъ задачъ можетъ быть построено вѣрное понятіе о зависимости искомой величины отъ каждаго изъ вліяющихъ на нее условій. 2) Учащіяся должны понять, что часто невозможный дробный результатъ, который иногда получается на промежуточныхъ ступеняхъ разсужденія (дробное число людей, напр.) не вліяетъ на вѣрность разсужденія. Во избѣжаніе дробнаго результата, можно бы сначала опредѣлять искомую величину въ зависимости отъ всѣхъ тѣхъ величинъ, которыя, при приведеніи къ единицѣ, повлекутъ за собою сначала только умноженіе соответствующаго искомой величинѣ значенія ея, — съ тѣмъ чтобы потомъ перейти къ величинамъ, которыя потребуютъ дѣленія. Но такой способъ крайне затруднителенъ и утомителенъ. Гораздо лучше убѣдить учащихся въ томъ, что не слѣдуетъ обращать вниманія на величину промежуточныхъ результатовъ, если только разсужденія, благодаря которымъ они достигнуты, справедливы. Когда ими преодолѣны трудности самаго рѣшенія задачъ на сложное тройное правило, то можно имъ выяснить также и замѣчательную особенность промежуточныхъ результатовъ, когда мы имѣемъ дѣло съ недѣлимыми единицами*).

§ 24. Рѣшенію задачъ на такъ наз. правило процентовъ должно, безъ сомнѣнія, предшествовать установленіе точнаго понятія о значеніи термина „процентъ“. Тотъ взглядъ, по которому процентомъ называется непременно число единицъ прибыли или убытка, получаемыхъ на 100 единицъ капитала, принадлежитъ, конечно, къ числу взглядовъ не довольно правильныхъ и недостаточно общихъ. Принявъ этотъ взглядъ, мы становимся прямо вступникъ предъ выраженіями: „процентъ грамотныхъ“, „процентъ глухонѣмыхъ“, „процентъ усѣвающихъ“ и т. п., — выраженіями,

*) Трудности, представляемая случаемъ дробнаго числа недѣлимыхъ единицъ (случаемъ, впрочемъ, сравнительно рѣдкимъ), не замѣчаются при томъ способѣ рѣшенія задачъ на сложное тройное правило, который основанъ на примѣщеніи ученія о пропорціяхъ. Но это, конечно, не можетъ умалить значенія способа приведенія къ единицѣ. — Кромѣ того, считаемъ нужнымъ замѣтить, что въ классѣ можно начать усвоеніе тройныхъ правилъ не съ простого, а со сложнаго тройнаго правила, и такъ поступаютъ преподаватели, считающіе кажущуюся простоту задачъ на простое тройное правило вредною для слабей надлежащаго усвоенія правильной идеи о задачахъ на это послѣднее правило. Не подлежитъ сомнѣнію, что съ этимъ взглядомъ слѣдуетъ считаться.

которые только послѣ нѣкоторыхъ разъясненій и натяжекъ подводятся подѣ понятіе убыли или прибыли. Гораздо удобнѣе и правильнѣе тотъ весьма простой взглядъ на процентъ, по которому процентомъ какого либо числа называется одна сотая доля этого числа и по которому, стало быть, 5% , 7% и т. п. обозначаютъ 0,05 и 0,07 данного числа независимо отъ понятія убыли или прибыли. При рѣшеніи задачъ всѣхъ возможныхъ типовъ на правило простыхъ процентовъ этотъ взглядъ оказываетъ неоцѣнимыя услуги, сводя всѣ вопросы къ отысканію либо частей цѣлаго, либо цѣлаго по частямъ, либо, наконецъ, кратнаго отношенія двухъ чиселъ. Для того, чтобы выработать въ учащихся надлежащее понятіе о значеніи термина процентъ, полезно вначалѣ задавать упражненія въ отысканіи 25% , 50% , 75% , 20% и т. п. чиселъ небольшихъ; при этомъ не надо гнаться непремѣнно за условіями торговыми, а даже напротивъ избѣгать ихъ. Когда учащіеся вполне понимаютъ, что 2 есть 50% четырехъ, а $\frac{3}{4}$ не иное что, какъ 50% полуторы или 75% одной единицы и т. п., тогда труднѣйшая сторона дѣла усвоена.

За-то нѣкоторые, довольно большія, затрудненія представляетъ распространеніе понятія процента на дробное число процентовъ и примѣненіе пропорцій къ интересующимъ насъ задачамъ. Понятіе о дробномъ числѣ процентовъ, впрочемъ, усваивается довольно легко, если за точку исхода принять понятіе о дроби съ дробнымъ числителемъ. Что же касается приложенія пропорцій, то оно основано на томъ, что если число a составляетъ $p\%$ числа b , то отсюда

$$a = b \times \frac{p}{100}, \text{ откуда } 100 \cdot a = b \cdot p,$$

что равносильно пропорціи

$$a : b = p : 100,$$

изъ которой вытекаютъ всѣ примѣненія пропорцій къ случаямъ, представляющимся при рѣшеніи задачъ на правило простыхъ процентовъ. Во всякомъ случаѣ не подлежитъ сомнѣнію, что если примѣненіе вышеустановленнаго опредѣленія процента представляетъ большія практическія удобства при рѣшеніи задачъ на правило процентовъ съ помощью способа приведенія къ единицѣ, то рѣшеніе тѣхъ же задачъ съ помощью пропорцій не лишено нѣкотораго, хотя и незначительнаго при недостаточно научной постановкѣ дѣла, развивательнаго значенія. Это справедливо также и вообще относительно приложенія пропорцій.

Что касается задачъ на правило учета векселей, то главнѣйшія трудности задачъ этого рода сводятся какъ къ самому понятію вычета, такъ и къ распознаванію того—всѣ ли изъ числа данныхъ въ задачѣ величины принадлежатъ къ классу пропорціо-

нальныхъ или иѣтъ. Самый же способъ рѣшенія задачъ всѣхъ родовъ на правило учета векселей съ помощью приведенія къ единицѣ далеко не затруднителенъ. Въ „Учебникѣ“ нашемъ, надѣемся, достаточно подробно рассмотрѣны задачи различныхъ типовъ на правило учета векселей, рѣшаемыя съ помощью пропорцій по коммерческому и по такъ называемому математическому способу; подробности примененія способа приведенія къ единицѣ тоже достаточно просты. Но должно замѣтить, что прежде чѣмъ приступить къ задачамъ на учетъ векселей, слѣдуетъ обратиться къ задачамъ на вычисленіе скидокъ безъ отношенія къ моменту платежа, съ тѣмъ чтобы потомъ перейти къ скидкамъ, находящимся въ зависимости отъ того—какъ далеко условленный моментъ полной уплаты, т. е. другими словами—къ учету векселей.

На задачахъ на правило пропорціональнаго дѣленія и товарищества не считаемъ нужнымъ останавливаться, въ виду достаточно подробной разработанности этого правила по способу пропорцій въ нашемъ „Учебникѣ ариѳметики“ и въ виду сравнительной простоты примененія способа приведенія къ единицѣ. Считаемъ только необходимымъ обратить вниманіе учащихся, что даже при употребленіи способа приведенія къ единицѣ весьма полезно приучить дѣтей къ записи условій въ видѣ пропорцій,—для чего, конечно, понадобится довольно много упражненій. Такъ, учащіеся должны всякія условія, выраженныя въ видѣ пропорцій, записывать именно въ этомъ видѣ, напр., условія, по которымъ одно число составляетъ половину другого, а другое— $\frac{3}{4}$ третьяго, учащіеся должны записывать такъ

$$x : y = 1 : 2, y : z = 3 : 4;$$

кромѣ того, они должны умѣть преобразовывать подобныя пропорціи въ пропорціи сложныя, т. е. въ пропорціи вида

$$x : y : z : \dots = a : b : c : \dots$$

Что касается задачъ на такъ называемое правило смѣшенія, то при рѣшеніи задачъ т. наз. перваго рода приходится применять только четыре дѣйствія, а задачи на правило смѣшенія втораго рода суть задачи на пропорціональное дѣленіе, при чемъ вся трудность заключается только въ подведеніи условій задачи подъ условія пропорціональнаго дѣленія. Наиболее удобнымъ долженъ быть признанъ способъ опредѣленія тѣхъ количествъ товара различныхъ сортовъ, которымъ соответствуетъ одна единица прибыли или убытка. При этомъ не должно упускать изъ виду также указанія на неопредѣленность задачи, когда она принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ.

§ 26. Задачи на правило сроковъ принадлежатъ къ числу обязательныхъ статей курса. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ

сборниках арифметических задач они помѣщаются въ виду интересныхъ приемовъ ихъ разрѣшенія. Наибольше удобнымъ долженъ быть признанъ тотъ приемъ ихъ рѣшенія, который основанъ на введеніи въ разсужденіе вспомогательной, притомъ произвольной величины, выражающей доходъ, приносимый единицею капитала (рублемъ) въ одну единицу времени (въ годъ или мѣсяцъ, смотри по условіямъ задачи). Другіе способы не отличаются достаточнымъ единообразіемъ. („Доп. Ст.“ § 7 ст. VIII-й).

Особенное мѣсто среди тройныхъ правилъ занимаетъ также такъ называемое цѣпное правило. Оно отчасти примыкаетъ къ правилу пропорціональнаго дѣленія, но при этомъ способъ разрѣшенія задачъ на цѣпное правило, основанный на прирѣшеніи пропорцій, нѣсколько неудобенъ въ практическомъ отношеніи, отлчается въ весьма сильной степени громоздкостью и, вслѣдствіе этого, не легко усваивается учащимися. („Уч. ар.“ § 111). Но за-то такой способъ рѣшенія задачъ на цѣпное правило заключаетъ въ себѣ одинъ весьма важный моментъ, ради котораго не мѣшаетъ учащимся ср. уч. зав. ознакомить съ этимъ приемомъ: мы говоримъ о той особенноти этого способа, которая состоитъ въ необходимости яснаго и полнаго разграниченія понятій объ именованныхъ и отвлеченныхъ числахъ и въ установленіи различія между отношеніемъ разноименныхъ, но однородныхъ, именованныхъ чиселъ и отношеніемъ чиселъ отвлеченныхъ. Способъ приведеніи къ единицѣ ведетъ въ случаѣ задачъ на цѣпное правило значительно быстрее къ цѣли, причѣмъ прирѣшеніе его сводится къ опредѣленію частей цѣлаго, но во всякомъ случаѣ учащій долженъ имѣть въ виду, что приемы рѣшенія задачъ на цѣпное правило, несмотря на свою простоту, особенно легко забываются учащимися, если не приняты мѣры къ довольно частому упражненію ихъ въ рѣшеніи подходящихъ задачъ.

§ 27. Къ числу необязательныхъ принадлежитъ также статья о непрерывныхъ дробяхъ. Больше или меньше полное ученіе о непрерывныхъ дробяхъ излагается въ курсѣ алгебры, подлежащемъ прохожденію въ ср. уч. зав. Но, въ виду чисто-практическихъ соображеній и въ силу довольно большого значенія ученія объ основномъ свойствѣ подходящихъ непрерывной дроби, по которому каждая подходящая наилучшимъ образомъ выражаетъ приближенную величину данной обыкновенной дроби, необходимо учащимся ср. уч. зав. ознакомить практически со способами обращенія обыкновенныхъ дробей въ непрерывныя, со способомъ нахожденія ея подходящихъ и съ великимъ значеніемъ этихъ подходящихъ въ практическомъ смыслѣ. Если не задаваться слишкомъ широкими теоретическими горизонтами, то первоначальные элементы ученія объ арифметическихъ непрерывныхъ дробяхъ

могутъ быть легко усвоены учащимися и притомъ сыграть довольно важную роль въ ихъ математическомъ развитіи. Самая теорія непрерывныхъ дробей, играющая, какъ извѣстно, столь важную роль въ математическомъ анализѣ, при этомъ, конечно, останется въ сторонѣ. Но это было бы не важно, если бы только самая сущность и значеніе непрерывныхъ дробей для практическихъ цѣлей учащимися могла быть болѣе или менѣе ясно понята. Къ сожалѣнію, этого можно ожидать только при достаточномъ количествѣ практическихъ упражненій. А потому, строго говоря, непрерывнымъ дробямъ и ихъ чисто-практическимъ приложениямъ не мѣсто въ курсѣ ариѳметики, несмотря на всѣ кажушіяся выгоды внесенія въ курсъ приложений этой теоріи.

§ 28. При прохожденіи въ низшихъ трехъ классахъ ср. уч. зав. полнаго практическаго курса ариѳметики, какъ это само собою разумѣется, задачи играютъ роль весьма значительную, и о роли задачъ въ этомъ курсѣ выше было говорено, кажется, достаточно. Намъ остается еще обратиться къ вопросу о томъ—какую роль при обученіи ариѳметикѣ въ низшихъ классахъ можетъ и долженъ играть учебникъ.

Учиться по учебнику вообще очень трудно; но въ то время какъ для взрослага, даже при извѣстной подготовкѣ, учиться по учебнику вообще только трудно, для малолѣтняго это чаще всего почти невозможно. Малолѣтній просто не обладаетъ умѣніемъ учиться по книжкѣ: его вниманіе слишкомъ мало развито, его умственные навыки не достаточно разносторонни, его воспримчивость по отношенію къ логически-стройной рѣчи слишкомъ инертна; печатныя слова учебной книжки въ его умѣ возбуждаютъ весьма слабыя и расплывчатые представленія; да и вообще предѣлы его пониманія книжной рѣчи весьма узки. Понятно, что при такихъ условіяхъ *учиться* по учебнику (хотя бы даже самоучительнаго направленія) малолѣтній не въ состояніи.

Но этого мало: при прохожденіи дѣтьми 7—8—9 лѣтъ первоначальнаго курса ариѳметики имѣется въ виду пріобрѣтеніе учащимся первоначальныхъ *представленій* (не понятій) ариѳметическаго характера, работа не логическая, а скорѣе психологическая; въ учебникѣ же преобладающими являются логическія точки зрѣнія, а психологическія остаются въ сторонѣ; кромѣ того міръ ариѳметическихъ представленій, даваемыхъ первоначальнымъ курсомъ ариѳметики, предполагается въ учебникѣ уже усвоеннымъ и выработаннымъ. Стало-быть, при первоначальномъ обученіи ариѳметикѣ (въ приготовительныхъ классахъ, гдѣ такъ-выше имѣются, въ низшихъ отдѣленіяхъ начальныхъ городскихъ и сельскихъ школъ и при обученіи домашнемъ—первоначальномъ) учебникъ является совершенно ненужнымъ, излишнимъ и даже совершенно не примѣнимымъ.

Въ первомъ классѣ ср. уч. зав. дѣти еще тоже не настолько окрѣпли умственно, чтобы возможно было отъ учащагося требовать прочтенія имъ на-дому или иного параграфа учебника, хотя бы содержаніе этого параграфа было учащемуся досконально извѣстно, благодаря достаточной проработкѣ данной статьи въ классѣ. Ученикъ или ученица перваго класса не могли еще научиться не только самостоятельно читать учебникъ, но даже какъ слѣдуетъ читать его въ присутствіи учителя. Поэтому въ первомъ классѣ учебникъ можетъ быть употребляемъ только при двухъ условіяхъ: 1) матеріальное содержаніе даннаго параграфа должно быть учащемуся досконально извѣстно со всеми своими психологическими основами, логическими тонкостями и техническими приѣмами, и 2) читать этотъ параграфъ можно только въ классѣ подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учащаго, при разъясненіяхъ со стороны читающаго, слушателей и самого учителя. То же справедливо для употребленія учебника во второмъ классѣ ср. уч. зав., гдѣ учащіяся еще тоже не достаточно развиты для чтенія текста хотя бы и извѣстнаго имъ содержанія. Только въ III-мъ классѣ, гдѣ и возрастъ, и умственное развитіе, и количество знаній гораздо значительнѣе, можно задавать на-дому тѣ или другія статьи учебника, и то лишь въ случаѣ, если основныя ученія этой статьи въ классѣ достаточно полно и подробно разработаны. Задаваніе же на-дому статей новыхъ наврядъ ли приведетъ къ хорошимъ результатамъ. Даже болѣе того: скольконибудь трудныя въ логическомъ отношеніи статьи даже въ III-мъ классѣ мужскихъ (четвертомъ женскихъ) уч. заведеній должны быть проработываемы по учебнику только въ классѣ при непосредственномъ участіи и подъ постояннымъ наблюденіемъ учащаго, и притомъ лишь въ томъ случаѣ, когда содержаніе данной статьи учащимся хорошо извѣстно изъ классныхъ занятій. Задаваніе же совершенно новыхъ статей по учебнику такимъ образомъ умѣстно только въ высшихъ классахъ, и то не въ очень широкихъ размѣрахъ.

Весь вопросъ можетъ заключаться только въ томъ — нуженъ ли вообще учебникъ, пужна ли проработка курса по учебнику и нельзя ли совершенно обойтись безъ него. Вегарину, когда обученіе состояло главнымъ образомъ въ усвоеніи паузистъ текста учебника, этотъ вопросъ былъ бы невозможенъ, потому что обученіе въ то время считалось немислимымъ безъ учебника; при современномъ же развитіи класснаго обученія многие сомнѣваются не только въ необходимости, но даже въ надобности учебника. Но при этомъ забывается, что одна изъ цѣлей средняго учебнаго заведенія должна заключаться въ томъ, чтобы учащіяся научились въ немъ учиться,—учиться не только подъ постоянною ферулою учителя, но также и болѣе или менѣе самостоятельно, по

книгамъ. Къ этому воспитанникамъ ср. уч. заведеній надо при-
выкнуть, въ этомъ направленіи должно ихъ развивать, и къ этой
цѣли можетъ и должно быть приурочено употребленіе учебника.
Кромѣ того, знанія свои дѣти должны же какъ нибудь оформить,
проявить и фиксировать, если здѣсь можно употребить эти два
слова въ томъ смыслѣ, въ какомъ они употребляются въ искус-
ствѣ фотографіи. Учебникъ не только долженъ быть регулято-
ромъ классныхъ занятій, но также долженъ заключать въ себѣ
дѣльное изложеніе приобретенныхъ учащимися въ классѣ позна-
ній и умѣній, — изложеніе, къ достоинствамъ котораго должно
стремиться изложеніе учащихся и которому должны быть чужды
выполнѣ естественныя, но не всегда заслуживающія одобренія
особенности и неизбежныя, но подлежащія искорененію, недо-
статки дѣтской рѣчи.

У каждаго учителя найдется какая либо точка зрѣнія, съ ко-
торой то или иное выраженіе даннаго учебника, та или иная по-
становка даннаго вопроса почему либо не выдерживаетъ критики.
Эта критика дѣльному учебнику повредить не въ состояніи, и
нѣкоторыя измѣненія (чисто редакціонныя) текста учебника поэтому
вполнѣ позволительны въ классѣ, если только они вызываются
дѣйствительными педагогическими или научными требованіями и
если требованія учителя не отличаются ненужною въ этомъ слу-
чай педагогичностью. Такая критика въ состояніи и возбудить са-
модѣтельность учащихся, и надлежащимъ образомъ направить и
увѣрить мысль ихъ *). Но при этомъ, въ погонѣ за точностью
выраженія, не должно упускать еще болѣе важнѣхъ элементовъ
обученія: мы говоримъ о живости представленій, точности и яс-
ности мысли и о дифференцировкѣ понятій. Само собою при этомъ
разумѣется, что опредѣлять должно только тѣ понятія, которыя
подлежатъ опредѣленію и допускаютъ таковое, и что не въ изо-
биліи опредѣленій заключается вся суть курса.

*) Само собою разумѣется, что все вышесказанное руководило нами
при составленіи „Учебника арифметики“, неизбежныя недостатки кото-
раго объясняются не неправильностью выше разработанныхъ точекъ
зрѣнія, а лишь неумѣемъ справиться съ задачею: мы стремились дать
учебникъ (не самоучитель) краткій по изложенію и полный по содержа-
нію, согласный съ научными требованіями (какъ мы себѣ эти послѣднія
представляемъ) и болѣе или менѣе доступный, *послѣ надлежащей клас-
ской работы*, по изложенію. Если же объемъ его вышелъ такъ значите-
ленъ, то въ томъ виню желаніе наше въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ
статей“ изложить теоретическія основы арифметики какъ науки, чѣмъ
мы желали оказать, между прочимъ, нѣкоторую услугу также препода-
ванію повторительнаго (теоретическаго) курса арифметики въ одномъ
изъ высшихъ классовъ. Очень сожалѣя, что мы не сумѣли изложить
все выше намѣченное въ предисловіи къ нашему „Учебнику“, просимъ у
читателя извиненія за это замѣчаніе pro domo sua.

Само собою также разумеется, что учебникъ играетъ ту же роль и въ другихъ учебныхъ заведенияхъ, въ которыхъ курсъ арифметики приближается къ курсу этого предмета въ ср. уч. зав. Кроме того понятно, что въ трехгодичной начальной школѣ приличная классная проработка курса по какому нибудь краткому учебнику умѣстна никакъ не равнѣ второго или даже третьяго года обученія.

§ 29. Въ одномъ изъ высшихъ классовъ всякаго среднего учебнаго заведенія курсъ арифметики подлежитъ повторенію. Помимо повторенія арифметическихъ правилъ (каковая надобность, къ чести нашихъ ср. уч. зав., представляется весьма рѣдко) повторительный курсъ имѣетъ цѣлью восполненіе неизбѣжныхъ теоретическихъ пробловъ, которые оказываются въ арифметическихъ познаніяхъ и умѣньяхъ учащихся. Проблемы эти зависятъ не только отъ того, что учащіеся многое должны были переработать изъ курса арифметики, но также и отъ того, что многія ученія арифметики въ низшихъ классахъ могутъ быть пройдены только практически.

Не только статьи, соприкасающіяся съ ученіями изъ области теории чиселъ (статьи объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ, наименьшемъ кратномъ числѣ, о первоначальныхъ числахъ, о періодическихъ дробяхъ), но и самыя ученія о четырехъ дѣйствіяхъ пуждаются не столько въ повтореніи, сколько въ дополненіи ихъ теоретическими элементами и теоретическими же точками зрѣнія. Ибо не только поминутыя ученія изъ теории чиселъ, которыя въ практическомъ курсѣ арифметики низшихъ классовъ не могутъ быть изложены вполне строга и полно, со всѣми теоремами и доказательствами, но даже ученія о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми и дробными числами по необходимости должны, при усвоеніи ихъ учениками низшихъ классовъ, излагаться скорѣе практически и съ точки зрѣнія искусства вычисленія, чѣмъ теоретически и съ точки зрѣнія научной. Совершенно обойтись безъ дополнительныхъ статей по предмету арифметики средне-образовательный курсъ математики не можетъ, стало быть, ни въ какомъ случаѣ; слѣдовательно нельзя также удовлетвориться только повтореніемъ курса арифметики, пройденнаго въ низшихъ классахъ, въ особенности если это повтореніе пріурочивать къ учебнику, служившему руководствомъ въ низшихъ классахъ. Ученія начальной, если можно такъ выразиться, дѣтской арифметики для учениковъ высшихъ классовъ крайне не интересны; учащіеся съ этими ученіями свыклись, срослись, если можно такъ выразиться, и заставить юношей только повторять то, что сдѣлалось ихъ полнымъ достояніемъ, было бы на-врядъ ли педагогично и во всякомъ случаѣ мало полезно. Поэтому усвоенное ими въ низшихъ классахъ надо въ высшихъ освѣтить теоретически и дополнить чистго теоретическою проработкою всего учебнаго матеріала. Арифмети-

ку-искусство въ высшемъ классѣ повторять не слѣдуетъ со всѣми ея чисто-техническими, такъ сказать, умѣльными и правилами, которые должны быть учащемуся отлично извѣстны, благодаря постоянному примѣненію этихъ умѣни и правилъ во все время пребыванія въ учебномъ заведеніи. — На практикѣ этого взгляда получилъ полное право гражданства, и нынѣ повтореніе курса ариѳметики въ большинствѣ случаевъ приурочивается къ какому либо учебнику теоретической ариѳметики, въ роцѣ, напримѣръ, сочиненій Серре, Серре и Комберуса, Бертраиа, и г. п.

При поступленіи въ учительскую семинарію или учительскій институтъ, воспитанники этихъ учебныхъ заведеній, какъ извѣстно, подвергаются испытанію въ знаніи болѣе или менѣе полного курса ариѳметики. Само собою разумѣется, что при повтореніи ими курса ариѳметики дополнительныя, теоретическія статьи тоже не должны быть забываемы. Будущему учителю не менѣе, чѣмъ всякому претендующему на серьезную подготовку человѣку, необходимо болѣе или менѣе серьезное пониманіе научныхъ основъ ариѳметики, — тѣмъ болѣе, что такое пониманіе можетъ оказаться для него чрезвычайно полезнымъ въ будущемъ, при исполненіи имъ своихъ учительскихъ обязанностей *). Кроме того, нѣкоторыя ученія ариѳметики, какъ напр. ученіе о приближенныхъ вычисленіяхъ, могутъ быть излагаемы только въ отдѣлѣ дополнительныхъ статей и проходимы только въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав.

Такимъ образомъ мы видимъ, что цѣль особеннаго отдѣла дополнительныхъ статей по предмету ариѳметики заключается въ истинномъ, дѣйствительномъ доополненіи ариѳметическихъ познаній и умѣній, приобретенныхъ воспитанниками среднихъ учебныхъ заведеній въ низшихъ классахъ, и воспитанниками учительскихъ семинарій и институтовъ — въ тѣхъ школахъ, гдѣ они получили свое первоначальное образованіе. Считать подобное „повтореніе“ ариѳметики бесполезнымъ было бы рискованно еще и потому, что, безъ такого повторенія, для учащагося связь ариѳметики съ остальными отраслями математики, ея право на нѣкоторое мѣсто въ іерархіи математическихъ наукъ было бы непонятно,

*) Мы въ своемъ „Учебникѣ ариѳметики“ всѣ гдѣ элементы ариѳметическихъ ученій, которые находятся въ тѣснѣйшей связи съ научно-логическими и теоретическими основами ариѳметики, выдѣлили въ особый отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“, не считая возможнымъ соединить краткое изложеніе правилъ искусства ариѳметическаго вычисленія съ полнымъ научнымъ ихъ обоснованіемъ. Поэтому весьма многое въ „Учебникѣ“ наше изложено безъ доказательства, причемъ всякій разъ дѣлается ссылка на отдѣлъ „Дополнительныхъ статей“. Само собою разумѣется, что преподаватель въ случаѣ надобности можетъ и самъ соединить прохожденіе какого либо ученія по „Учебнику“ съ усвоеніемъ теоретическихъ основъ этого ученія по „Дополнительнымъ статьямъ“.

вслѣдствіе чего ея престижъ въ глазахъ учащихся былъ бы совершенно уничтоженъ. Развитію такого взгляда на ариометику, конечно, невозможно сочувствовать ни въ какомъ случаѣ.

§ 30. Первоначальныя понятія (выработанныя въ низшихъ классахъ) о величинѣ, числѣ, измѣреніи и единицахъ мѣры, конечно, должны быть своевременно надлежащимъ образомъ дополнены, такъ какъ эти понятія нуждаются въ очень многихъ разъясненіяхъ, въ большей фактичности знанія и въ большемъ углубленіи въ логическія трудности этихъ вопросовъ. Особеннаго вниманія заслуживаютъ: метрическая система мѣръ, нѣкоторыя особенныя единицы мѣры, ученіе объ измѣреніи времени и краткія свѣдѣнія о календаряхъ, а равно особенности современной русской монетной системы, до 1886 года существовавшей отъ отсутствія простой связи между золотомъ и серебряною банковою монетою; при этомъ банковую монету называются только серебряные рубль, полтинникъ и четвертакъ. (§ 1—7 ст. I отд. „Доп. ст.“). При этомъ должно быть обращено вниманіе также и на практическія упражненія въ переводѣ нашихъ мѣръ въ мѣры десятичной системы, а равно въ переводѣ мѣръ десятичной системы въ мѣры общія. Необходимо также стремиться къ возможно наглядному усвоенію учащимися взаимныхъ отношеній между мѣрами,—тѣмъ болѣе, что въ научныхъ сочиненіяхъ и въ технику метрическая система получила уже почти полное право гражданства и что, можетъ-быть, въ скоромъ времени метрическая система приобрететъ у насъ право гражданства и въ обычныхъ торговыхъ сношеніяхъ. Полезно, какъ это замѣтилъ достопочтенныи А. Д. Путьга въ статьѣ своей подъ заглавіемъ „Объ употребленіи метрической системы въ школахъ“ (Ж. М. Нар. Просв., № 7 за 1887 г.), ознакомить учащихся съ грубыми, такъ сказать, отношеніями между нашими и десятичными мѣрами; изъ такихъ отношеній г. Путьга отмѣчаетъ слѣдующія: метръ равенъ полусаженю безъ $1\frac{1}{2}$ вершковъ; километръ менѣе версты на $31\frac{1}{3}$ сажени; два съ половиною сантиметра равны одному дюйму; въ квадратномъ дюймѣ $6\frac{1}{4}$ кв. см.; гектаръ менѣе десятины на 203 кв сажени; декастеръ болѣе куб. сажени на $\frac{3}{4}$ куб. арш. О томъ, что при прохожденіи статьи о величинѣ, числѣ и измѣреніи надо обратить вниманіе также и на то, что нѣкоторыя изъ основныхъ ариометическихъ понятій не поддаются вполне строгому, съ логической точки зрѣнія, опредѣленію (понятія числа, счета, единицы и т. п.), мы не говоримъ, такъ какъ эти логическіе вопросы могутъ быть съ пользою для дѣла затрагиваемы только мимоходомъ, и то только при достаточномъ для того уровнѣ логическаго развитія учащихся. При малѣйшей возможности учащіяся, приученные на урокахъ геометріи къ требованіямъ научной точности въ опредѣленіяхъ, могутъ

съ великою пользою тѣмъ общаго умствениаго развитія усвоить себѣ что далеко не всѣ понятія подлежатъ опредѣленію и что въ ариметикѣ такихъ понятій не мало. Не безполезно при этомъ выяснитъ имъ истинную роль опредѣленій, необходимость опредѣленій точныхъ, ести только вообще опредѣленіе возможно, и безполезность, а равно невозможность опредѣленій, когда мы имѣемъ дѣло съ понятіемъ первоначальнымъ.

Статья о нумераціи и различныхъ способахъ обозначенія чиселъ („Доп. ст.“, II) принадлежитъ къ числу интереснѣйшихъ и доступнѣйшихъ допозитивныхъ главъ ариметики. Но при этомъ полезно ознакомитъ учащихся не только съ самыми основами различныхъ системъ нумераціи, но также и съ письменнымъ производствомъ четырехъ дѣйствій надъ числами, выраженными въ искусственныхъ системахъ. При этомъ съ большою пользою для дѣла можетъ быть выяснено великое значеніе таблицъ сложения и умноженія при письменномъ производствѣ вообще четырехъ дѣйствій надъ числами, по какой бы системѣ числа ни обозначались. Обыкновенно таблицамъ сложения и умноженія не придается то значеніе, которое они на самомъ дѣлѣ имѣютъ: если бы этихъ таблицъ невозможно было запомнить наизусть, письменное и устное производство всѣхъ дѣйствій было бы дѣломъ необычайно труднымъ и кропотливымъ.

§ 31. Статья о четырехъ дѣйствіяхъ надъ цѣлыми отвлеченными числами, если на нее смотрѣть не только съ точки зрѣнія устнаго или письменнаго выполненія этихъ дѣйствій, но также съ точки зрѣнія теоретической, содержитъ въ себѣ не мало логическихъ трудностей и тонкостей, на которыя, къ сожалѣнію, не всегда обращается то количество вниманія, какого эта статья достойна при повтореніи въ одномъ изъ высшихъ классовъ. Не вдаваясь въ частности, которыя умѣстны въ научномъ курсѣ ариметики и которыя изложены нами во всей подробности въ ст. III отд. „Доп. Ст.“ нашего „Учебника“, мы должны обратить вниманіе учащаго только на ту особенность теоріи четырехъ дѣйствій, что только въ основѣ ученій о сложеніи лежатъ нѣкоторыя аксіомы, ученія же о прочихъ дѣйствіяхъ представляютъ собою нѣкоторую, вполне законченную, систему опредѣленій и теоремъ, такъ или иначе опирающихся на ученіе о сложеніи. Въ отдѣлѣ „Доп. Статей“ за аксіомы сложения принятъ законъ перестановительный для случая двухъ и болѣе слагаемыхъ. Законъ же сочетательный доказывается на основаніи этихъ аксіомъ. Въ основу ученія о вычитаніи положено опредѣленіе этого дѣйствія, какъ дѣйствія, обратнаго сложенію. На ученіяхъ объ умноженіи и дѣленіи цѣлыхъ чиселъ мы не останавливаемся, позволяя себѣ отослать благосклоннаго читателя къ соотвѣствующимъ „Дополнительнымъ статьямъ“ нашего Учебника.

§ 32. Статьи о дѣлимости, объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ, о первоначальныхъ числахъ и наименьшемъ кратномъ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ принадлежатъ къ числу труднѣйшихъ по причинѣ сравнительно большой отвлеченности всѣхъ этихъ ученій, а равно крайней трудности усвоенія взаимныхъ отношеній тѣхъ теоремъ, которыя составляютъ основу этихъ теорій. Въ отдѣлѣ „Доп. ст.“ мы держались слѣдующаго порядка: въ статьѣ (IV) о дѣлимости мы изложили прежде всего нѣкоторыя теоремы о дѣлителяхъ (§ 1), потомъ признакъ дѣлимости на 11 (§ 2), выводъ общаго признака дѣлимости чиселъ на какое угодно число и его приложения (§ 3) и повѣрку дѣйствій съ помощью признаковъ дѣлимости (§ 4); затѣмъ у насъ идетъ ученіе объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ: § 1—основныя теоремы, § 2—теорема Ламе, § 3—нѣкоторыя свойства общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, § 4—нѣкоторыя правила, § 5—объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ нѣсколькихъ чиселъ. Послѣ ученій объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ идетъ ученіе о первоначальныхъ числахъ, о первоначальныхъ дѣлителяхъ, о взаимно-первыхъ числахъ и о наименьшемъ кратномъ двухъ и нѣсколькихъ чиселъ. (Ст. VI отд. „Доп. Ст.“, §§ 1—6).

Въ многочисленныхъ методическихъ указаціяхъ эти статьи, конечно, не нуждаются. Считаемо только неизлишнимъ замѣтить, что очень строго должно различать тѣ ученія, которыя зависятъ, отъ тѣхъ ученій, которыя не зависятъ отъ принятой системы счисления; кромѣ того должно замѣтить, что учащіеся должны отличать теоремы о первоначальныхъ числахъ, какъ таковыхъ, отъ теоремъ о первоначальныхъ дѣлителяхъ.

§ 33. По усвоеніи намѣченныхъ выше ученій можно перейти къ дополненію знаній учащихся о дробяхъ: къ обобщенію понятія о дроби (ст. VII отд. „Доп. Ст.“), къ первоначальному ученію объ арифметическихъ непрерывныхъ дробяхъ, о дробяхъ, аналогичныхъ десятичнымъ въ искусственныхъ системахъ счисления, и о дробяхъ десятичныхъ періодическихъ. Въ особености много трудностей представляетъ это послѣднее ученіе, если къ нему предъявлять болѣе или менѣе строгія научныя требованія. Достойно вниманія, что безъ теоріи предѣловъ равенство, существующее между періодическою дробью и основною дробью, отъ обращенія которой произошла данная періодическая дробь, должно быть принимаемо безъ доказательства. Всѣ остальные изъ числа существующихъ доказательства этого равенства, конечно, не вполне строгія. Такъ, напр., то доказательство, которое основано на увеличеніи періодической дроби во столько разъ, сколько это необходимо для того, чтобы получить смѣшанное число съ тѣмъ же періодомъ, не строго потому, что мы не имѣемъ права, безъ

дальнѣйшихъ разговоровъ, распространять правило вычитанія дробей конечныхъ на случай дробей бесконечныхъ. Столь же не строги и другія доказательства равенства, существующаго между периодическою дробью и ея основною, если данное доказательство не опирается вполне явнымъ образомъ на теорію предѣловъ.

При прохожденіи дополнительной статьи о дробяхъ въ высшей степени полезно обратиться къ опредѣленію дѣйствій надъ дробями и къ примѣненію къ дѣйствіямъ надъ ними законовъ перестановительнаго, сочетательнаго и распределительнаго; но мы въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ Статей“ не посвятили этимъ ученіямъ отдѣльныхъ параграфовъ въ виду того, что въ нашемъ „Учебникѣ“ сдѣланы всѣ указанія этого рода и ограниченія, которыя неизбежны, пока мы имѣемъ дѣло съ числами цѣлыми, и что ученія о дробяхъ могутъ быть повторены прямо по „Учебнику“ съ небольшими глоссами учащаго по поводу каждаго изъ этихъ ученій. Крайне важно выясненіе учащимся условности дѣйствія умноженія въ случаѣ дробнаго множителя; но на этомъ не считаемъ пущнымъ останавливаться въ виду того, что въ главѣ настоящаго „Опыта“, посвящаемой методологическимъ вопросамъ ариметики, читатель легко найдетъ всѣ относящіяся сюда соображенія.

§ 34. Ученіе о пропорціяхъ и тройныхъ правилахъ должны быть не только дополнены, но также и повторены, если можно такъ выразиться, отъ доски до доски, съ самаго начала. Такое повтореніе представляетъ также и практическую важность въ виду того, что на испытаніяхъ зрѣлости въ качествѣ письменныхъ работъ предлагаются задачи, распадающіяся обыкновенно на нѣсколько задачъ на различныя тройныя правила. Особенно развивательное значеніе имѣютъ при этомъ, главнымъ образомъ, ученія о производныхъ пропорціяхъ и о пропорціональныхъ величинахъ (§ 5 ст. VIII-ой). Изъ задачъ на тройныя правила заслуживаютъ особеннаго вниманія задачи на сложное тройное правило, на правило учета векселей и на правило сроковъ.

При прохожденіи ученія о пропорціяхъ не бесполезно различать пропорціи, членами которыхъ являются величины, отъ пропорцій, членами которыхъ являются отвлеченныя числа. Чаше всего различіе между этими видами пропорцій, къ сожалѣнію, не дѣлается. А между тѣмъ это различіе весьма важно въ виду того, что въ пропорціяхъ, члены которыхъ суть величины, не всегда возможны тѣ преобразованія, которыя возможны въ пропорціяхъ, составленныхъ изъ отвлеченныхъ чиселъ. Не меньшаго вниманія заслуживаютъ тѣ свойства двухъ данныхъ пропорціональныхъ величинъ, по которому либо отношеніе, либо произведеніе всякихъ двухъ, соответствующихъ другъ другу, числовыхъ значеній этихъ величинъ представляетъ собою число постоянное.

§ 35. Статьи о приближенныхъ вычисленіяхъ принадлежать къ числу необязательныхъ въ курсѣ нѣкоторыхъ среднихъ учебныхъ заведеній. Тѣмъ не менѣе нѣкоторые параграфы этой статьи подлежатъ непремѣнному усвоенію въ одномъ изъ высшихъ классовъ ср. уч. зав. Особеннаго вниманія заслуживаютъ приближенное вычисленіе суммы и произведенія. При прохожденіи ученія о приближенномъ вычисленіи произведенія не бесполезно обратиться, въ случаѣ крайняго недостатка времени, къ способу, на который обращаетъ свое вниманіе Лагранжъ въ одной изъ своихъ лекцій въ Нормальной Школѣ и о которомъ мы говоримъ въ § 20 этой главы настоящаго сочиненія. Способъ же умноженія по методѣ, изобрѣтеніе которой приписывается Уггреду, не представляетъ особенныхъ затрудненій, если къ нему приступить послѣ усвоенія болѣе естественнаго способа приближеннаго умноженія чиселъ, изложеннаго въ §§ 5—7 ст. IX-ой отд. „Доп. Ст.“ Что же касается способовъ приближеннаго дѣленія, то они не отличаются ни особенною простотою, ни особенно большимъ развивательнымъ значеніемъ, а потому могутъ быть оставлены безъ вниманія, въ особенности если времени мало.

Изъ методическихъ особенностей статьи о приближенныхъ вычисленіяхъ мы считаемъ необходимымъ отмѣтить только одну, а именно: прежде всего ученія о приближенныхъ вычисленіяхъ должны быть пройдены на числахъ цѣлыхъ, съ тѣмъ чтобы только послѣдствіемъ перейти къ десятичнымъ дробямъ. Кромѣ того должно замѣтить, что въ интересующей насъ статьѣ особенно важно точное понятіе о приближенной величинѣ десятичныхъ чиселъ и основныя теоремы объ этихъ величинахъ (§§ 1—2 ст. IX-ой).

§ 36. Не вдаваясь въ послѣднихъ параграфахъ настоящаго сочиненія въ частности, умѣстныя скорѣе въ научномъ курсѣ ариметики, чѣмъ въ „Опытѣ методики ариметики“, и поэтому болѣе или менѣе подробно изложенныя нами въ отдѣлѣ „Дополнительныхъ статей“ нашего „Учебника“, мы за-то считаемъ необходимымъ коснуться нѣкоторыхъ степеней курса ариметики въ нѣкоторыхъ профессиональныхъ учебныхъ заведеніяхъ, въ которыхъ курсъ ариметики болѣе или менѣе близокъ къ курсу этого предмета, который подлежитъ изученію въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ: къ числу такихъ учебныхъ заведеній принадлежатъ учительскіе институты и семинарія, коммерческія и техническія училища, а также частью реальныя училища, поскольку эти послѣднія, въ настоящемъ своемъ видѣ, могутъ быть причислены къ разряду также профессиональныхъ.

Въ учительскихъ институтахъ и семинаріяхъ курсъ ариметики долженъ отличатся не только дополнительнымъ, но также и повторительнымъ характеромъ. Хотя предполагается, что по-

ступающей въ подобное учебное заведеніе вполне усвоить себѣ ранѣе или менѣе основательный, хотя бы и не особенно полный, курсъ ариѳметики, но чаще всего запасъ ариѳметическихъ познаній, имѣющійся у поступающаго въ заведеніе интересующаго насъ типа, оказывается далеко не достаточнымъ для возможности только дополненія курса статьями теоретическаго характера: оказывается, что очень многое должно быть за-ново повторено, проработано и даже за-ново пройдено. Лучше всего при этомъ было бы соединять повтореніе статей по учебнику съ попутнымъ прохожденіемъ соответственныхъ дополнительныхъ статей,—каковое соединеніе и практикуется въ очень многихъ заведеніяхъ интересующаго насъ типа. Благодаря такому соединенію повторенія ариѳметики-искусства съ усвоеніемъ ученій ариѳметики-науки, воспитанникъ учительской семинаріи или учительскаго института можетъ усвоить болѣе или менѣе стройный и полный курсъ ариѳметики. Само собою разумѣется, что къ воспитанику учительскаго института можетъ быть при этомъ предъявлено больше требованій въ отношеніи теоретическихъ элементовъ ариѳметики, чѣмъ къ воспитанику семинаріи.

Что касается курса ариѳметики въ коммерческихъ училищахъ, то онъ долженъ отличаться отъ общеобразовательнаго курса не столько количествомъ дополнительныхъ статей, сколько многочисленными упражненіями въ быстромъ и сокращенномъ вычисленіи т. е. развитіемъ специальныхъ навыковъ, составляющихъ предметъ такъ называемой коммерческой ариѳметики. Въ „Учебникѣ“ нашемъ и „Методическомъ Сборникѣ“ (ч. II) обращено вниманіе, конечно, только на интересные также и для общеобразовательной школы приемы сокращеннаго вычисленія, при чемъ специально-коммерческія задачи и упражненія не нашли себѣ мѣста въ этихъ трудахъ нашихъ. Ни такъ называемыя чисто-коммерческія калькуляціи, ни задачи на арбитражъ не вошли въ наши сочиненія. Относительно курса ариѳметики въ коммерческихъ училищахъ мы считаемъ себя выравъ поставить только одно требованіе: прежде чѣмъ переходить къ ученіямъ такъ называемой коммерческой ариѳметики, въ низшихъ классахъ коммерческихъ училищъ должно пройти предварительно курсъ общеобразовательный этого предмета, не особенно, впрочемъ, затрудняя этотъ курсъ теоретическими элементами и ни въ коемъ случаѣ не упуская изъ виду простѣйшихъ сокращеній въ вычисленіяхъ.

Въ реальныхъ училищахъ нынѣ существующаго устройства, несмотря на профессиональный характеръ, который иногда придается этимъ заведеніямъ, умѣстенъ скорѣе общеобразовательный полный курсъ ариѳметики; при этомъ только въ дополнительныхъ коммерческихъ классахъ долженъ быть пройденъ курсъ ариѳметики коммерческой. Что же касается техническихъ училищъ, то допол-

пительный теоретическій курсъ арифметики можетъ быть въ немъ совершенно игнорируемъ, взаимно чего должны быть пройдены нѣкоторые приемы сокращеннаго вычисления и нахождения возможно удовлетворительныхъ результатовъ четырехъ дѣйствій по приближеннымъ величинамъ данныхъ чиселъ. Эти умѣнья технику могутъ очень и очень пригодиться.

§ 37. Въ курсѣ учительскихъ семинарій и институтовъ весьма важное мѣсто занимаетъ методика обученія всѣмъ предметамъ начальной школы, въ томъ числѣ и методика обученія арифметикѣ. Само собою разумѣется, что методика арифметики можетъ быть изучаема въ этихъ заведенияхъ только тогда, когда самая арифметика воспитанниками усвоена вполне основательно. Кроме того понятно, что изученіе методики арифметики должно вестись въ связи съ практическими занятіями воспитанниковъ въ начальной школѣ, болѣе или менѣе тѣсно связанной съ даннымъ учебнымъ заведеніемъ. То же относится къ педагогическимъ классамъ другихъ учебныхъ заведеній, преслѣдующихъ отчасти также и цѣль пріученія воспитанниковъ и воспитанницъ къ исполненію учительскихъ обязанностей. При этомъ преподаватель методики арифметики долженъ, для пользы дѣла, принять какую либо одну методу обученія за основу всего курса методики, хотя это не исключаетъ болѣе или менѣе подробнаго ознакомленія воспитанниковъ съ сущностью и главнѣйшими приемами другихъ методовъ. Учитель, по нашему крайнему разумѣнію, долженъ быть преданъ какой либо одной методѣ для того, чтобы ея примѣръ заразилъ также и его воспитанниковъ и чтобы такимъ образомъ дѣло обученія отличалось живостью и энергіею. Преподаватель методики арифметики, однаково равнодушный ко всѣмъ методамъ обученія, наврядъ ли будетъ въ состояніи вдохнуть жизнь въ преподаваніе своихъ учениковъ. Мы лично считаемъ методу цѣлесообразныхъ задачъ, совершенно притомъ свободную отъ приемовъ какого бы то ни было изученія чиселъ, наиболѣе подходящею какъ для народныхъ школъ, такъ и вообще для первоначальнаго обученія арифметики; но, при всемъ своемъ несочувствіи методѣ изученія чиселъ, мы считаемъ должомъ заявить, что, по нашему мнѣнію, гораздо лучше выполнить свою задачу готъ преподаватель методики арифметики, который всен душой преданъ методѣ изученія чиселъ, чѣмъ преподаватель методики арифметики, однаково равнодушный ко всѣмъ возможнымъ методамъ обученія. Вообще говоря равнодушный къ своему предмету учитель весьма неслелателенъ, но въ учителя будущихъ учителей это качество особенно нежелательно *).

*) О мотивахъ, заставившихъ насъ отдать предпочтеніе методѣ цѣлесообразныхъ задачъ, ср §§ 1—8 гл III нагоящаго сочиненія, а также

§ 38. Какъ это ни странно, въ отношеніи преподаванія арифметики лица, окончившія курсъ въ учительскихъ семинарияхъ и институтахъ, часто находятся, въ некоторомъ смыслѣ, въ болѣе благоприятныхъ условіяхъ, чѣмъ лица, окончившія курсъ физико-математическихъ наукъ въ университетахъ съ цѣлью посвященія себя преподаванію математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Въ то время какъ лица, окончившія курсъ въ учительской семинарии или въ учительскомъ институтѣ или даже въ педагогическомъ классѣ женской гимназіи, болѣе или менѣе знакомы съ методикою, какъ педагогическою дисциплиною, и съ основными ея положеніями, лицо, окончившее курсъ въ высшемъ учебномъ заведеніи, приступаетъ къ дѣлу обученія прямо съ университетскою смѣлою, на которой его занимали вопросы совсѣмъ другого порядка. Послѣ болѣе или менѣе самостоятельной и трудной работы надъ ученіями теории сравненій перенити къ выясненію дѣлій основныхъ правилъ четырехъ дѣйствій надъ числами; послѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій перейти къ сложению или дѣленію многочленовъ; послѣ аналитической геометрии и блестящихъ приложений къ ней приемовъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій обратиться къ осколкамъ теории предѣловъ въ курсѣ геометрии; послѣ высшей алгебры и уравненій высшихъ степеней перейти къ уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; послѣ аналитической механики перейти къ элементарнымъ и, вслѣдствіе этого, крайне труднымъ въ методическомъ отношеніи ученіямъ о равномерномъ и неравномерно-ускоренномъ движеніи, или о центрѣ тяжести силъ, — все это сдѣлать гораздо труднѣе, чѣмъ это кажется съ перваго взгляда. Миръ идей, которыми живетъ умъ студента физико-математическаго факультета, на столько отличается отъ методическихъ трудностей первоначальнаго преподаванія арифметики, алгебры, геометрии и физики въ среднемъ учебномъ заведеніи, что только благодаря солидной научной подготовкѣ начинающаго учителя, чрезъ два или три года изъ него вырабатывается болѣе или менѣе полезная въ школь силѣ.

Трудности первоначальнаго преподаванія алгебры и геометрии извѣстны всякому учителю, который пожелаетъ порыться въ своихъ воспоминаніяхъ о началѣ своей учительской дѣятельности дѣлать сначала ненормальныя и цѣли буквеннаго обозначенія чиселъ, ни необходимость доказательствъ вообще, ни роль чертежа при доказательствѣ, ни роль аксіомъ, ни особенности об-

сочиненіе и ше подъ заглавіемъ „Методика арифметики съ приложеніемъ Сборника упражненій по арифметикѣ для учащихся. Руководство для учт. семина и инстит., для педагогич. кл. женскихъ гимназій и для учителей нар. школъ“.

ратныхъ теоремъ. Въ сравнительно лучшемъ положеніи находится учитель, который, вслѣдствіе чисто случайныхъ обстоятельствъ принужденъ былъ еще на гимназической и университетской скамьяхъ заниматься уроками и репетированіемъ. Если, благодаря особенностямъ своего развитія и складу характера, онъ занимался этимъ дѣломъ съ большимъ или меньшимъ жаромъ и интересомъ, то изъ него, безъ сомнѣнія, очень скоро по окончаніи курса наукъ въ университетѣ можетъ выработаться также и хорошій классный учитель, ибо онъ въ этомъ случаѣ отлично помнитъ—что затрудняло его учениковъ и что это самого затрудняло при репетированіи. Но если окончившій курсъ математическихъ наукъ почему либо поставленъ былъ въ такіа счастливыя матеріальныя условія, что не принужденъ былъ упражняться въ преподаваніи и обученіи за время своего пребыванія въ гимназій и въ университетѣ, то онъ долго будетъ бродить въ потемкахъ, и долго у него дѣло обученія не будетъ клеиться и сравнительно очень долго оно у него совсѣмъ не будетъ идти на ладъ. Репетированіе и частные уроки, которыми во время пребыванія въ стѣнахъ учебныхъ заведеній занималось данное лицо, есть такой родъ занятій, который, хотя и не заключаетъ въ себѣ ничего предосудительнаго, тѣмъ не менѣе вообще не можетъ заслуживать особеннаго одобренія и поощренія: такіа занятія зачастую роковымъ образомъ вліяютъ на научныя занятія даннаго лица, лишая его необходимаго досуга, отвлекая отъ научныхъ занятій, разстраивая его нервную систему, вредно отзываясь даже на его здоровьи и иногда убивая его творчество въ направленіи научномъ. Нормальнымъ поэтому можно было бы считать только такой строй школы, при которомъ репетированіе стало бы ненужнымъ и при которомъ учащіеся высшихъ классовъ ср. уч. зав. и студенты университетовъ могли бы заниматься преимущественно своимъ дѣломъ, не беря на себя обязанностей репетитора или даже учителя. Но, помимо всего этого, вообще разсчитывать на ту педагогическую подготовку, которую студентъ самоучкою можетъ приобрѣсти благодаря частнымъ урокамъ и репетированію, было бы крайне рискованно. Кроме того, эта подготовка, помимо того, что она отличается характеромъ совершенно случайнымъ, далеко не можетъ считаться удовлетворительною также въ отношеніи полноты и основательности. Стало-быть, если бы можно было разсчитывать, что даже всѣ будущіе учителя ср. уч. зав. принуждены во время своего пребыванія въ высшихъ классахъ ср. уч. зав. и въ университетахъ, заниматься уроками, то и въ такомъ случаѣ чрезвычайно рискованно было бы вполнѣ полагаться на педагогическую подготовку этихъ начинающихъ учителей.

Приймавъ все вышеннеложенное во вниманіе, легко придемъ

къ заключенію, что методикѣ обученія отраслей такъ называемой нижней математики должно быть непременно удѣлено пѣкоторое вниманіе физико-математическими факультетами, призванными между прочимъ также и готовить учителей математики для среднихъ учебныхъ заведеній. Кромѣ методики ариметики, методики нижней алгебры и методики Евклидовой геометрии, въ высшей степени полезно было бы введеніе въ число обязательныхъ предметовъ, для студентовъ высшихъ семестровъ, методологии математическихъ наукъ вообще и отраслей нижней математики въ частности, а равнымъ образомъ практическихъ занятій и упражненій въ преподаваніи и изложеніи студентами различныхъ главъ высшей и нижней математики. Такая постановка дѣла подготовленія учителей ср. уч. зав. (въ спеціально для этого предназначенныхъ практическихъ курсахъ) въ очень скоромъ времени привела бы весьма большую пользу дѣлу обученія въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ; при такой постановкѣ дѣла начинающій учитель былъ бы избавленъ отъ массы пылъ почти неизбежныхъ промаховъ и разочарованій, а учащіеся—отъ излишнихъ огорченій и совершенно случайныхъ и легко устранимыхъ вредныхъ вліяній на складъ ихъ мысли и занятій. Каждый изъ преподавателей помнить—какъ ему трудно было въ началѣ достигнуть того, чтобы работать весь классъ, какъ ему трудно было ознакомиться съ подготовкою класса, какъ ему трудно было воздерживаться отъ „лекцій“, и т. п. Не только умѣнью обучать, но иногда даже умѣнью стоять какъ слѣдуетъ у классной доски, умѣнью спрашивать учащихся съ мѣста, внятно и понятно излагать, умѣнью пользоваться моментами сосредоточеннаго вниманія и возбуждать таковое,—всѣмъ этимъ умѣньямъ у начинающаго учителя взяться неоткуда. Эти умѣнія могутъ образоваться только изъ практики, но необходимымъ условіемъ ихъ развитія является не только солидная научная подготовка, полученная учащимъ во время пребыванія его въ стѣнахъ высшаго учебнаго заведенія, а также и болѣе или менѣе близкое знакомство съ самими предметами и основными требованіями искусства обученія данному предмету и болѣе или менѣе близкое знакомство съ основными положеніями и требованіями методики обученія этому предмету. О томъ, что большую пользу тому же дѣлу принесло бы внесеніе въ число обязательныхъ предметовъ физико-математическаго факультета (а равно и историко-филологическаго факультета, также подготовляющаго, между прочимъ, учителей соответствующихъ предметовъ для ср. учебныхъ заведеній) болѣе или менѣе полныхъ курсовъ педагогики, психологии и логики—здѣсь говорить, конечно, не мѣсто. На первыхъ порахъ для студентовъ физико-математическаго факультета, отдѣленія математическихъ наукъ, было бы полезно введеніе въ число обязательныхъ предметовъ;

методологи математических наук и методики обучения арифметикъ, алгебрѣ, геометрии, тригонометрии, физикѣ и космографіи, эти педагогическія дисциплины могли бы оказать громадное и, притомъ, весьма полезное влияние на постановку дѣла преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведенияхъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Рѣшенія

нѣкоторыхъ типическихъ арифметическихъ задачъ алгебраическаго характера *).

447. Я задумалъ число; умноживъ его на 7 и вычтя изъ полученнаго 56, я получилъ 240. Какое я задумалъ число?—Я получилъ 240 послѣ того, какъ я вычелъ изъ нѣкотораго числа 56, стало-быть, я вычелъ 56 изъ суммы $240 + 56$, т. е. изъ 296-ти. Это послѣднее число получилось послѣ того, какъ я умножилъ задуманное число на 7; стало-быть задуманное число есть частное, происходящее отъ раздѣленія 296-ти на 7. (Не дѣлится на-цѣло безъ остатка, стало-быть, пять цѣлаго числа, удовлетворяющаго условіямъ задачи.)

450. Одинъ спросилъ у другого сколько у этого послѣдняго денегъ.— Если бы у тебя было 56 руб., отвѣчалъ тотъ, и если бы я тебѣ отдалъ изъ моихъ денегъ 4 руб., то у тебя стало бы въ 5 разъ больше, чѣмъ у меня. Сколько денегъ у каждого изъ нихъ?—Если бы у перваго лица было 57 руб., а второе ему дало бы изъ своихъ денегъ 4 руб., то у перваго стало бы 60 руб.; но тогда, по условію задачи, у перваго было бы въ 5 разъ больше, чѣмъ у втораго, стало-быть у втораго было бы въ 5 разъ меньше 60-ти рублей, т. е. 12 р. На самомъ же дѣлѣ у втораго $12 + 4$, т. е. 16 руб. А сколько денегъ у перваго изъ нихъ—по условіямъ задачи опредѣлить нельзя.

451. Кто задумалъ число; если къ нему прибавить 257, то получится вдвое болѣе, чѣмъ сколько онъ задумалъ. Какое онъ задумалъ число?—Чтобы получить вдвое болѣе чѣмъ сколько онъ задумалъ, къ задуманному числу должно прибавить число, совершенно равное задуманному. Стало-быть, 257 и есть задуманное число.

*) Задачи взяты изъ II ч. вашего „Методическаго Сборника арифметическихъ задачъ для ср. уч. зав.“ и снабжены тѣми же номерами, подъ которыми онѣ тамъ помѣщены.

453. Если къ утроенному неизвѣстному числу прибавить 54, то въ результатѣ получится умноженное неизвѣстное число. Какъ велико неизвѣстное число?—Чтобы получилось умноженное, къ утроенному неизвѣстному должно прибавить то же утроенное число. Стало быть 54 и есть утроенное неизвѣстное число, а неизвѣстное число втрое меньше 54-хъ, т. е. равно 54 : 3, или 18-ти.

455. Если бы я хотѣлъ купить себѣ сукна на пальто по 4 р. 50 к. за аршинъ, то у меня на это не хватило бы одного рубля и 5-ти коп.; на свои деньги я могъ бы купить себѣ этого сукна только въ томъ случаѣ, если бы мнѣ торговецъ уступилъ то же сукно по 4 р. 20. Сколько мнѣ надобно сукна на пальто и сколько у меня денегъ?—Покупателю не хватаетъ, стало быть, по 30 к. на каждый аршинъ; а всего ему не хватаетъ 1 р. 5 коп. т. е. 105-ти коп. Сколько разъ 30 к. содержится въ 105-ти к., столько ему надобно аршинъ. Но $105:30=3\frac{1}{2}$; стало-быть, на пальто нужно $3\frac{1}{2}$ аршина сукна.

Замѣчаніе. При алгебраическомъ рѣшеніи этой задачи можно за неизвѣстное принять количество денегъ, находящихся въ распоряженіи покупателя. Если его обозначить въ копейкахъ чрезъ x , то $x + 105$ выражаетъ стоимость всего сукна, считая по 4 р. 50 к. за аршинъ. Число же аршинъ выразится частнымъ $(x+105) : 450$. Такими же разсужденіями найдемъ, что частное $x : 420$ выражаетъ то же самое число аршинъ. Откуда мы получили уравненіе

$$\frac{x + 105}{450} = \frac{x}{420}$$

Отсюда видимъ, что въ этомъ случаѣ алгебраическій способъ представляетъ собою большой просторъ въ разсужденіяхъ.

461. Къ задуманному числу прибавлено 25, полученное умножено на 4, изъ этого произведенія вычтено 100; разность умножена на 5, произведеніе раздѣлено пополамъ, въ окончательномъ результатѣ получилось 10. Какъ велико задуманное число?—Послѣ раздѣленія пополамъ и некотораго числа получилось въ результатѣ 10, стало-быть раздѣленное число равно 20-ти; оно есть произведеніе некоторой разности на 5, стало-быть эта разность равна $20 : 5$, т. е. 4-мъ; разность эта получилась послѣ вычитанія числа 100 изъ некотораго числа, стало-быть это послѣднее равно 104-мъ; 104 есть произведеніе, происходящее отъ умноженія некотораго числа на 4, стало-быть это число равно частному отъ раздѣленія 104-хъ на 4, т. е. равно 26; 26 получилось послѣ прибавленія 25-ти къ задуманному числу; стало-быть задуманное число равно 1-цу.

463. Продавая аршинъ сукна по 5 руб., торговецъ получилъ на всемъ остаткѣ этого сукна 12 руб. прибыли; продавая же по 3 рубля, онъ получилъ 4 руб. убытку. Какъ великъ остатокъ этого сукна и почему ему самому обошелся аршинъ сто?—Продавая аршинъ по 3 руб., торговецъ получилъ бы меньше, чѣмъ въ случаѣ, если бы онъ продавалъ 5 руб. за аршинъ, на 12 руб., да еще на 4 рубля. т. е. онъ получилъ бы 16-тью рублями меньше, чѣмъ въ случаѣ продажи по 5 руб. за аршинъ. Эти 16 рублей онъ потерялъ бы, благодаря только тому, что каждый аршинъ онъ продавалъ бы 2-мя рублями дешевле. Сколько разъ 2 р. содержится въ 16-ти рубляхъ, столько было аршинъ въ остаткѣ сукна, т. е. въ немъ было 8 арш. Теперь опредѣлимъ почему ему самому обошелся аршинъ этого

сукна. Продавая сукно по 5-ти рублей за аршинъ, онъ выручилъ бы за весь остатокъ 40 руб.; при этомъ онъ получилъ бы 12 руб. прибыли, стало-быть ему этотъ остатокъ въ 8 аршинъ стоилъ 28 р. Откуда получили, что одинъ аршинъ остатка стоитъ 3 р. 50 к.

Замѣчаніе. Алгебраическимъ способомъ эта задача рѣшается очень легко; не-алгебраическое же рѣшеніе ея представляетъ очень большія логическія и методическія трудности.

575. Сумма двухъ чиселъ 364, а разность 48. Какъ велико каждое изъ нихъ?—*1-й способъ.* Въ 364-хъ содержится и большее, и меньшее число; если къ меньшему прибавить 48, то получится большее; если къ большему и меньшему прибавить 48 (не по 48-ми, а только 48!), то получимъ: большее, меньшее да 48, т. е. удвоенное большее. Стало-быть $364 + 48$, т. е. 412 равно удвоенному большему, откуда получимъ, что большее равно 206. Меньшее же равно разности между 364-мя и 206-тью, т. е. равно 158-ти. *2-ой способъ.* Разность между искомыми числами 48; стало-быть, если бы отъ большаго отнять 24 единицы да прибавить ихъ къ меньшему, то оба числа стали бы равны между собою, а сумма ихъ при этомъ осталась бы та же, т. е. тоже равнялась бы 364-мъ. Въ этомъ случаѣ каждое изъ нихъ было бы равно половинѣ 364-хъ, т. е. 182-мъ. Но таковы были бы эти числа только послѣ уменьшенія большаго на 24 и увеличенія меньшаго на 24. Стало-быть большее равно суммѣ 182-хъ и 24-хъ, т. е. 206, а меньшее разности между 182-мя и 24-ми, т. е. 158-ми.

Замѣчаніе. Алгебраически эта задача рѣшается либо съ помощью одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ: $x + (x + 48) = 364$, либо съ помощью системы уравненій

$$\begin{cases} x + y = 364 \\ x - y = 48, \end{cases}$$

и оба эти рѣшенія отличаются отъ арифметическаго чрезвычайною безыскусственностью и простотою. Очень полезно предпослать рѣшенію задачъ этого типа рѣшеніе задачъ типа, повидимому, болѣе сложнаго, но на самомъ дѣлѣ болѣе прозрачнаго въ логическомъ отношеніи. Мы говоримъ о задачахъ, изъ которыхъ одна (№ 485) рѣшена ниже. Когда задачи этого рода усвоены учащимся, для рѣшенія задачъ интересующаго насъ типа можно прибѣгнуть къ слѣдующему разсужденію: въ 364-хъ содержится меньшее число да большее, т. е. одинъ разъ меньшее да еще одинъ разъ меньшее, да еще 48, или два раза меньшее да еще 48. Но этотъ способъ представляетъ тотъ недостатокъ, что въ немъ имплиците скрытъ приемъ, по которому $a + (a + c) = (a + a) + c$. Кромѣ того онъ затруднителенъ потому, что пріучить къ подсчитыванію меньшихъ (или большихъ) чиселъ содержащихся въ данной суммѣ, легко можно только тогда, когда этихъ чиселъ много; въ данномъ же случаѣ ихъ получается только два, и это особенно затрудняетъ учащихся.

485. Сумма трехъ чиселъ 1509; первое болѣе третьяго на 633, а второе болѣе третьяго на 111. Какъ велико каждое изъ нихъ?—Въ числѣ 1509 содержится, стало быть, третье, да еще разъ третье и 111, да еще разъ третье и 633, т. е. три раза третье число да еще сумма 111-ти и 633-хъ, или три раза третье число да еще 744 единицы. И т. д.

486. Сумма трехъ чиселъ 1369; первое больше втораго на 403 единицы, а второе больше третьяго на 279. Какъ велико каждое изъ нихъ?—Въ

числѣ 1369 содержится: разѣ третье, еще разѣ третье да 279, да еще разѣ третье и сумма $403+279$, и т. д.

490. Сумма двухъ чиселъ 156; одно больше другого въ 5 разѣ. Какъ велико каждое изъ нихъ? — Въ числѣ 156 содержится разѣ меньшее число, да еще 5 разѣ то же число, т. е. всего 6 разѣ меньшее число.

492. Сумма трехъ чиселъ равна 21000. Какъ велико каждое слагаемое, если первое больше второго въ 9 разѣ, а второе больше третьего вдвое?— Стало-быть въ числѣ 21000 содержится разѣ третье, да еще 2 раза, да еще 18 разѣ третье.

495. Разность двухъ чиселъ равна 74-мъ; уменьшаемое больше вычитаемого вдвое. Какъ велики уменьшаемое и вычитаемое? Въ уменьшаемомъ содержится вычитаемое и разность; но по условію уменьшаемое вдвое больше вычитаемого, стало-быть оно также вдвое больше разности, т. е. оно равно 74×2 .

497. Сумма двухъ слагаемыхъ больше одного изъ нихъ на 1600 единицъ. Какъ велико это слагаемое, если оно меньше суммы въ 5 разѣ?—По условію одно изъ слагаемыхъ 1600, а другое меньше суммы въ 5 разѣ; стало-быть, оно меньше, чѣмъ 1600, всего въ 4 раза.

501. Нѣкто разсчиталъ, что у него столько же двадцатипятирублевыхъ бумажекъ, сколько и пятирублевыхъ; но съ другой стороны онъ разсчиталъ, что у него двадцатипятирублевыми бумажками на 400 рублей больше, чѣмъ пятирублевыми. Спрашивается, сколько у него всего денегъ?—Эти 400 рублей разницы между нѣкоторымъ числомъ 25-ти рублевыхъ и такимъ же числомъ 5-ти-рублевыхъ завнестъ отъ того, что каждая двадцатипятирублевка дороже пятирублеви на 20 руб. Сколько разѣ 20 р. содержится въ 400 рубляхъ, столько у этого лица двадцатипятирублевыхъ, и сколько же у него пятирублевыхъ бумажекъ.

507. У двоихъ поровну денегъ; если первый отдасть второму 40 р., то у него тогда будетъ втрое меньше, чѣмъ будетъ всего у второго. Сколько у каждаго денегъ?—Если онъ отдасть второму 40 руб., то у второго тогда будетъ на 80 рублей больше, чѣмъ у перваго. По условію у второго тогда будетъ втрое больше, чѣмъ у перваго, стало-быть у перваго тогда будетъ 40 рублей, а у второго 120 р. На самомъ же дѣлѣ у каждаго изъ нихъ по 80 руб.

510. Мальчикъ разсчиталъ, что если онъ изъ одного ящика перьявъ переложить въ другой 10 штукъ перьявъ, то во второмъ окажется вдвое больше, чѣмъ въ первомъ; но если бы онъ переложилъ изъ второго ящика въ первый 5 штукъ, то во второмъ оказалось-бы меньше, чѣмъ въ первомъ, втрое. Сколько перьявъ въ каждомъ изъ ящиковъ?—По условію задачи (обозначивъ число перьявъ въ 1-мъ ящикѣ цифрою I, а число перьявъ во 2-мъ цифрою II,—способъ близкій къ алгебраическому) получимъ:

$$I - 10 = \frac{II + 10}{2}$$

а по другому условію получимъ

$$\frac{I + 5}{3} = II - 5.$$

Теперь выразимъ число I въ доляхъ числа II изъ перваго и изъ второго

равенства (одинъ изъ способовъ рѣшенія системы уравненій); получимъ изъ перваго равенства

$$I - 10 = \frac{1}{2}II + 5, \text{ или } I = \frac{1}{2}II + 15,$$

а изъ втораго:

$$I + 5 = 3II - 15, \text{ или } I = 3II - 20.$$

Отсюда имѣемъ, что

$$\frac{1}{2}II + 15 = 3II - 20,$$

т. е. что удвоенное число перьевъ второго ящика, увеличенное половиною того же числа, равно 35-ти. Говоря иначе, 3 половинъ этого числа равны 35-ти; половина равна 7-ми, а все число перьевъ второго ящика равно 14.

Замѣчаніе. Другого совѣтъ, не алгебраическаго способа, рѣшеніе этой задачи нѣтъ. Очевидно, что чисто алгебраическое рѣшеніе этой задачи отличается и большею ясностью, и большею простотою. Того же рода трудности въ задачѣ подл № 511.

512. Если изъ двухъ неизвѣстныхъ чиселъ одно увеличить на 470, а другое уменьшить на 560, то полученные результаты будутъ равны между собою; сумма обонхъ чиселъ равна 2100. Спрашивается, какъ велико каждое изъ этихъ чиселъ?—Очевидно, что второе число больше перваго; при этомъ оно больше его и на 470, и на 560; стало-быть, оно больше перваго на $470 + 560$, т. е. на 1030. А въ такомъ случаѣ извѣстна сумма и разность двухъ чиселъ.

513. Если къ одному изъ двухъ неизвѣстныхъ чиселъ прибавить 840, а къ другому 350, то полученные результаты будутъ равны между собою; если же отъ перваго изъ нихъ отнять 1000, а отъ втораго—100, то первый результатъ будетъ меньше втораго въ три раза. Спрашивается, какъ велико каждое число?—Первое число меньше втораго на $840 - 350$, т. е. на 490. Если отъ него отнять еще 1000, то оно станетъ меньше втораго еще на 1000, т. е. будетъ меньше его на 1490; если послѣ этого отнять отъ втораго 100, то первое будетъ меньше втораго всего на 1390. Въ этомъ случаѣ оно будетъ вдвое меньше втораго; стало-быть, въ 1390 будетъ тогда содержаться удвоенное второе число, откуда получимъ, что второе число въ этомъ случаѣ, т. е. уже послѣ того какъ отъ него отнята 1000, равно 695-ти. Первоначальная величина перваго числа равна, стало-быть 1695.

515. 6 десятокъ апельсинновъ и 4 десятка лимоновъ вмѣстѣ стоили 3 р. 80 к.; въ другой разъ по той же цѣнѣ куплены сотня апельсинновъ и 4 десятка лимоновъ, и за все заплачено 5 р. 40 к. По чѣмъ десятокъ апельсинновъ и по чѣмъ десятокъ лимоновъ?—Въ обонхъ случаяхъ куплено одинаковое количество лимоновъ; стало-быть, вся разница между 5 р. 40 к. и 3 р. 80 к. зависитъ исключительно отъ разницы въ количествѣ купленныхъ апельсинновъ. И т. д.

517. 8 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стоятъ 1100 р.; 3 куски того же бархата и 2 куски такого же сукна стоятъ 770 р. По чѣмъ кусокъ бархата и по чѣмъ кусокъ сукна?—Съ увеличеніемъ количества купленнаго товара вдвое сумма заплаченныхъ за него денегъ должна увеличиться тоже вдвое, и т. д. Если мы вмѣсто 3-хъ кусковъ бархата, взятыхъ во второй разъ, возьмемъ 9 кусковъ бархата (т. е. вдвое болѣе), а вмѣсто 2-хъ

кусковъ сукна—6 кусковъ его (тоже втрое), то получимъ, что 9 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стоятъ 2210 р., въ то время какъ 8 кусковъ бархата и 6 кусковъ сукна стоятъ 1100 р. Отсюда получимъ, что кусокъ бархата стоитъ 110 руб.

Замѣчаніе. Очевидно, что подобный способъ рѣшенія задачъ этого рода есть замаскированный способъ рѣшенія системы уравненій съ помощью уравненій коэффициентовъ.

524. Аршинъ сукна и аршинъ бархата стоятъ вмѣстѣ 10 р. 80 к.; 25 аршинъ сукна стоятъ столько же, сколько 11 аршинъ бархата. По чѣмъ аршинъ бархата?—По условію 1 арш. сукна и 1 арш. бар. стоятъ 10 р. 80 к., откуда 25 арш. сукна и 25 арш. барх. стоятъ 270 р. Но по другому условію 25 арш. сукна стоятъ столько же, сколько 11 аршинъ бархата; стало-быть, 11 арш. бархата и 25 арш. бархата, т. е. 36 арш. стоятъ 270 руб. Откуда получимъ, что аршинъ бархата стоитъ 7 р. 50 к.

530. Лошадь вмѣстѣ съ сѣдломъ стоитъ 235 р.; лошадь вмѣстѣ со сбруей стоитъ 250 рублей; сбруя же съ сѣдломъ стоитъ 135 р. Что стоитъ лошадь, что сѣдло, что сбруя?—Изъ первыхъ двухъ условій слѣдуетъ, что сбруя дороже сѣдла на 15 руб.; сбруя же съ сѣдломъ стоитъ 135 руб. Стало-быть, по суммѣ и разности двухъ чиселъ надо найти каждое изъ нихъ, что уже не трудно.

540. Два путешественника, выѣхавъ въ одно и то же время изъ разныхъ городовъ, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи 1600 верстъ, ѣдутъ другъ къ другу на встрѣчу. Черезъ сколько времени они встрѣтятся, если первый изъ нихъ проѣзжаетъ въ часъ по 28 верстъ, а второй—по 22 версты, и если оба ѣдутъ безостановочно день и ночь?—Въ теченіе часа они другъ къ другу приближаются на 50 верстъ; стало-быть, разстояніе между путешественниками съ каждымъ часомъ уменьшается на 50 верстъ. Сколько разъ 50 верстъ содержится въ 1600 верстахъ, черезъ столько часовъ оба путешественника встрѣтятся.

541. Изъ города А въ городъ Б отправленъ курьеръ; спустя 18 часовъ другой курьеръ отправленъ въ догонку; первый проѣзжаетъ въ часъ по 30 верстъ, а второй—по 35 верстъ. Черезъ сколько часовъ второй догонитъ первого, если они оба ѣхали безостановочно день и ночь?—Первый курьеръ въ теченіи 18-ти часовъ отѣхалъ отъ города А на разстояніе $30 \text{ в.} \times 18$, т. е. 540 верстъ; въ теченіе каждаго часа движенія второй курьеръ приближается къ первому всего на 5 верстъ. Сколько разъ 5 верстъ содержится въ 540 верстахъ, черезъ столько часовъ второй курьеръ догонитъ первого.

545. 5 фунтовъ чаю, 10 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 20 р. 10 коп.; 7 ф. чаю, 15 фунтовъ сахару и 10 фунтовъ кофе стоятъ 23 р. 95 к.; 12 ф. чаю, 2 ф. сахару и 1 фунтъ кофе стоятъ 27 р. 20 к. Что стоитъ фунтъ чаю, фунтъ сахару и фунтъ кофе?—Уравнимъ число фунтовъ кофе въ первомъ и въ третьемъ случаяхъ; для этого предположимъ, что въ первый разъ куплено въ 13 разъ больше товара; тогда съ одной стороны (по первому условію): 5 фунтовъ чаю, 10 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 20 р. 10 к., 156 фунтовъ чаю, 26 ф. сахару и 13 ф. кофе стоятъ 353 р. 60 к. Отсюда получимъ, что 151 ф. чаю и 16 ф. сахару стоятъ 333 р. 50 к. Точно такимъ же образомъ найдемъ, уравнивъ число фунтовъ кофе въ второмъ и третьемъ случаяхъ, что 113 ф. чаю и 5 ф. сахару стоятъ 248 р. 5 к. Такимъ образомъ задача сведена къ типу № 317.

Замѣчаніе. Очевидно, что предложенное выше рѣшеніе подобно рѣшенію системы уравненій съ тремя неизвѣстными по способу уравненія коэффициентовъ.

546. Сумма двухъ чиселъ 2336; если же раздѣлить большее число на меньшее, то въ частномъ получится 7, а въ остаткѣ 96. Какъ велико каждое изъ чиселъ?—По второму условію большее число содержитъ въ себѣ 7 меньшихъ да еще 96 единицъ; а въ такомъ случаѣ число 2336 содержитъ въ себѣ 8 меньшихъ да еще 96 единицъ. П т. д.

550. Въ выручкѣ торговца 777 руб. пятирублевыми, трехрублевыми и рублевыми бумажками; рублевыхъ и пятирублевыхъ бумажекъ 129 штукъ. трехрублевокъ же въ выручкѣ на 336 рублей. Сколько въ выручкѣ пятирублевыхъ бумажекъ, если ихъ меньше, чѣмъ рублевыхъ, на 339 штукъ?—Въ выручкѣ трехрублевокъ столько, сколько 3 содержится въ 336, т. е. 112 штукъ. Пятирублевокъ и рублевокъ въ выручкѣ всего на 777 р. безъ 336 р., т. е. на 441 рубль. По условію, рублевыхъ и пятирублевыхъ всего 129 штукъ. Если бы все эти 129 бумажекъ были рублевыми, то ихъ было бы на сумму 129 рублей, т. е. на 312 рублей меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ. Эти 312 рублей разницы получились вслѣдствіе того, что нѣкоторыя изъ рублевыхъ бумажекъ замѣнены пятирублевыми. Этихъ послѣднихъ въ выручкѣ столько, сколько разъ 4 р. содержится въ 312 рубляхъ, т. е. 78 штукъ.

558. Даны два числа: 50 и 12; требуется прибавить къ каждому изъ нихъ поровну, но такъ, чтобы первая сумма была больше второй втрое. Но сколько надо прибавить къ каждому изъ этихъ чиселъ?—Разность между ними останется та же и послѣ прибавленія къ этимъ числамъ поровну. Стало-быть разность между ними и въ искомомъ случаѣ будетъ 38; но при этомъ, по условію, второе число будетъ меньше перваго втрое; стало-быть, послѣ того какъ къ обоимъ числамъ будетъ прибавлено поровну, 38 будетъ вдвое больше меньшаго числа, т. е. меньшее число въ этомъ случаѣ будетъ равно 19-ти. Такова будетъ величина меньшаго изъ чиселъ, когда къ обоимъ будетъ прибавлено поровну; стало-быть, поэтому, къ обоимъ числамъ надо прибавить по 7-ми.

Замѣчаніе. Задачи алгебраическаго характера съ дробными данными («Методическій Сборникъ» ч. II, №№ 1521—1650) не представляютъ по большей части никакихъ, заслуживающихъ отдѣльнаго разсмотрѣнія, особенностей.



КНИЖНЫЙ МАГАЗИНЪ

А. А. КАРЦЕВА

Коммисіонера Императорскаго Общества Любителей Естествознанія.
Москва, Мясницкая, Фуркасовскій пер., д. Обидиной.

Библиотека древнихъ классиковъ въ переводѣ на рус. языкъ (пособіе къ чтенію и изученію)

I. Геродотъ. кн. VIII. дословный переводъ съ подстрочнымъ словаремъ и примѣчаніями. М. 1886. ц. 30 к.

II. Титъ Ливій, Рим. исторія, кн. 22. М. 1886. ц. 30 к.

III. Рѣчи Цицерона противъ Катилины. М. 1886. ц. 30 к.

IV. Виргилій. Энеида V-я пѣснь. М. 1886. ц. 30 к.

V. Софокль. Антигона. М. 1887. ц. 30 к.

VI. Цицеронъ. Желій или разговоръ о дружбѣ. М. 1887. ц. 30 к.

Виноградовъ и Нинольскій.—Методика исторія по Крюгеру. М. 1885. ц. 1 руб.

Виноградовъ.—Сборникъ вопросовъ по исторіи. I. Всеобщая исторія. М. 1886. ц. 30 к.

Горожанскій.—Памятники древней племеннойности въ рус. переводѣ. Пособіе при изученіи исторіи рус. словесности. М. 1886. ц. 75 к.

Грибоѣдовъ.—Горе отъ ума. Ком. въ 4-хъ дѣйств. въ стихахъ. Съ біографіей и примѣч. Сосницкаго. М. 1885. ц. 10 к.

Кацнѣй.—Краткій конспектъ греч. грам. М. 1882. ц. 30 к.

Конашевичъ.—Опытъ систематизаціи арифметическихъ задачъ М. 1885. ц. 60 к.

— Сборникъ арифметическихъ примѣровъ. I. Цѣлыя числа. М. 1886. ц. 15 к. II. Дробн. М. 1886. ц. 30 к.

Пономаревъ.—Азбука для церковно-приходскихъ школъ. 2-е изд. М. 1886. ц. одна к.

— Въ школы и дома. 4-ая школьная книжка. 2-е изд. М. 1885. (Первое изданіе допущено Уч. Ком. М. Д. Пр. ц. Свят. Синодомъ къ употребленію въ старшихъ отдѣленіяхъ городскихъ и сельскихъ училищъ для ознакомленія дѣтей съ богослуженіемъ прав. церкви). ц. 45 коп.

Преображенскій.—Рукбв. прямолинейной тригонометріи (съ прилож. таблицъ тригонометрическихъ величинъ). М. 1886. ц. 75 к.

— Сборникъ тригонометрическихъ задачъ (съ изложеніемъ многихъ методовъ рѣшенія ихъ). М. 1886. ц. 20 к.

— Таблицы квадратовъ трехзначныхъ чиселъ до 10.000, тригонометрическихъ величинъ и пр. М. 1887. ц. 25 к.

— Начальныя понятія по химіи. Примѣнительно къ программамъ физики для гимназій. М. 1887. ц. 30 к.

Розановъ.—Сборникъ словъ, фразъ, изрѣченій, пословицъ для письма на урокахъ чистописанія по генетическому методу. М. 1883. ц. 80 к.

Русанова.—Звѣздочка. Книга для чтенія въ школы и дома. М. 1886. ц. 75 к.

Серре.—Курсъ арифметики. Пер. Юленича. М. 1884. ц. 1 р. 25 к.

Сосницкій.—Теорія словесности. М. 1884. ц. 75 к.

— Русская хрестоматія для старшихъ классовъ сред. учеб. зав. М. 1885. ц. 1 р. 75 к.